

УДК 539.3

## ХАРАКТЕР НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ НА ПОВЕРХНІ СФЕРОЇДАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ДІЇ ПОВЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУ ТА ЧИСТОГО ЗГИНУ

Т. Бубняк, к. ф.-м. н.

ORCID ID: 0000-0002-2814-8571

Львівський національний університет природокористування

<https://doi.org/10.31734/architecture2022.23.016>

### **Бубняк Т. Характер напружень для неідеального контакту на поверхні сферіодального включення при дії повздовжнього розтягу та чистого згину**

Розглянуто просторову задачу теорії пружності про розподіл напружень у трансверсально-ізотропному середовищі, яке містить таке ж включення, на межі розділу фаз. Дослідження доводять, що на межі розділу напруження мають локальний характер і швидко згасають із віддаленням від поверхні включення.

Зауважено, що в механіці деформованого твердого тіла важливе місце посідають просторові задачі теорії пружності і термопружності стосовно розподілу напружень в околі неоднорідностей, які мають конструктивні композити. Щодо міцності таких матеріалів, їх виробництво потребує інформації про досягнення компонентами напружень екстремальних значень у певних зонах (зонах руйнування). Такі екстремальні значення досягаються переважно на межі розділу фаз.

Одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який ґрунтується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливість застосування методу Фур'є – використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів.

Розглянуто задачу про розподіл напружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сферіода за лінійного одноосного нагріву. На межі розділу фаз запропоновано умови неідеального механічного і теплового контактів.

Розв'язок просторової задачі за заданих граничних умов на поверхні включення лінійного силового і температурного полів зводиться до розвитку шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за присланими функціями Лежандра першого і другого родів.

Отримані результати демонструють, що наявність включення у формі стиснутого сферіода в пружному трансверсально-ізотропному середовищі за неідеального контакту у випадку поздовжнього розтягу вздовж осі OZ залежно від відношення осей сферіода не суттєво впливає на концентрацію напружень, прямуючи до номінальних значень; концентрація нормальних і кругових напружень має стискальний характер, прямуючи до номінальних значень із збільшенням співвідношення осей сферіода.

**Ключові слова:** потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сферіод.

### **Bubniak T. Character of stresses for non-ideal contact on the surface of spheroidal inclusion under the action of longitudinal tension and clean bending**

A spatial problem of the theory of elasticity about stress distribution in a transversal-isotropic medium containing the same inclusion at the boundary of the phase separation is considered. The studies show that, at the interface, stresses are local in nature and rapidly attenuate with distance from the inclusion surface.

In the mechanics of a deformed solid, spatial problems of the theory of elasticity and thermal elasticity, which relate to stress distribution in the neighborhood of inhomogeneities with structural composites, occupy an important place. With respect to the strength of such materials, their production requires information on the achievement of stress components of extreme values in certain zones (zones of destruction). Such extreme values are generally reached at the interface.

The problem of obtaining reliable information about stress distribution in materials or structural elements is very important with consideration of the real picture of interfacial interaction, which is related to the use of the effective methods of solving spatial problems of elasticity theory.

The study of spatial problems of thermoelasticity for homogeneous isotropic and anisotropic bodies in general formulation is fraught with great mathematical difficulties because of the complexity of constructing the solution of a partial differential equation that satisfies certain boundary conditions.

One of the effective methods for solving the problems of elasticity theory is the Fourier method, which is based on the representation of the general solutions of equilibrium equations through potential functions. A feature of the Fourier

method is the use of different representations of the Lamé equation solution through harmonic functions, which allows one to search for a series solution.

The paper deals with the problem of stress distribution of an unlimited transversely isotropic medium, which contains anisotropic, relatively mechanical and thermal properties, inclusion in the form of a compressed spheroid with linear uniaxial heating. At the boundary of the phase section, conditions of non-perfect mechanical and thermal contacts are proposed.

The solution of the spatial problem under given boundary conditions on the surface of inclusion of the linear force and temperature fields is reduced to the development of the sought potential functions in trigonometric series by the connected Legendre functions of the first and second genera.

Satisfying the boundary conditions, an infinite system of linear algebraic equations for determining the expansion coefficients, which has a convergent solution, is obtained.

The obtained results show that the presence of inclusion in the form of a compressed spheroid in an elastic transverse isotropic medium at imperfect contact in the case of longitudinal stretching along the OZ axis depending on the ratio of spheroid axes does not significantly affect the stress concentration towards nominal values; the concentration of normal and circular stresses has a compressive nature, going to the nominal values with the increasing ratio of the spheroid axes.

**Key words:** potential functions, transversal-isotropic medium, non-ideal contact, spheroid.

**Постановка проблеми.** Розв'язання задач капітального будівництва інженерних споруд пов'язане насамперед із раціональним використанням виділених коштів. У пошуках шляхів підвищення якості будівництва важливу роль виконує дослідження довговічності будівельних матеріалів і конструкцій, які зазнають комплексного впливу умов експлуатації. Залізобетонні конструкції, облицювальні та гідроізоляційні матеріали, лаки, фарби тощо змінюються під дією зовнішніх чинників: опадів, коливань температури, сонячних променів, що призводить до зміни міцнісних характеристик конструкцій.

Важливою є проблема отримання достовірної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії, що пов'язано з використанням ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності [3].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження просторових задач теорії пружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з математичними труднощами через складну побудову розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який відповідає граничним умовам.

Метод Фур'є є одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності. Він ґрунтується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Сутність методу Фур'є – використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів [4].

Важливі результати в розв'язку задач теорії пружності отримані в роботах Ю. М. Коляно, В. Л. Рвачова, І. О. Мотовиловця, К. В. Солянік-

Красса, Я. С. Підстригача, Ю. М. Подільчука та багатьох інших учених.

**Постановка завдання.** Наше завдання – розглянути задачу про розподіл напружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда при дії вздовж осі OZ поздовжнього розтягу і чистого згину; на межі розділу фаз запропонувати умови неідеального механічного контакту.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо задачу про розподіл напружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда за повздовжнього розтягу. На межі розділу фаз пропонуються умови неідеального механічного і теплового контактів.

Ефективним методом розв'язку просторових задач теорії пружності є метод Фур'є, який ґрунтується на представленні загального розв'язку рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Цей метод дозволяє шукати розв'язок у вигляді рядів, наприклад, за функціями Лежандра, або інтегралів від гармонічних функцій з невідомими коефіцієнтами чи густинами [5].

Розв'язок просторової задачі за заданих граничних умов на поверхні включення лінійного силового і температурного полів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів:

$$\Phi_j(x, y, z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{n+m}{i(2n+1)} \left\{ \frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j) Q_{n+1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n+m+1)(n+m)} \right.$$

$$-\frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j)Q_{n-1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n-m+1)(n-m)} \left\{ a_{nm}^{(j)} \cos m\varphi + b_{nm}^{(j)} \sin m\varphi \right\}, \quad (j=1,2,3), \quad (1)$$

де  $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$  – невідомі сталі, які знаходять із граничних умов.

Для знаходження загального розв'язку рівнянь рівноваги у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння, складеного за коефіцієнтами системи рівнянь рівноваги, використовується представлення через потенціальні функції [1; 2]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}; \\ v &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; \\ w &= k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

У (2) коефіцієнти  $k_1, k_2$  виражаються через коефіцієнти рівнянь рівноваги та корені характеристичного рівняння.

Дотримуючись граничних умов, отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу, яка має збіжний розв'язок [2].

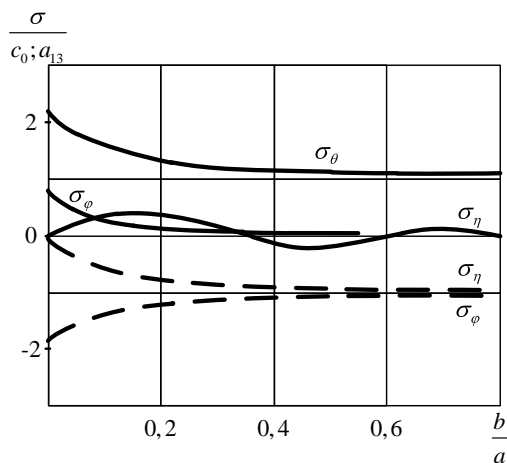


Рис. Концентрація напружень при розтягу

Розрахунок термонапруженого стану трансверсально-ізотропного середовища зі сфероїдальним включенням під дією лінійного температурного поля проводився в умовах неідеального контакту для матеріалів із пружними характеристиками:

включення –  $(10^{10} \text{Н/м}^2)$   $\tilde{c}_{11} = 5,97$ ;  $\tilde{c}_{12} = 2,62$ ;  $\tilde{c}_{13} = 2,17$ ;  $\tilde{c}_{23} = 6,17$ ;  $\tilde{c}_{44} = 1,64$ ; середовище –  $(10^{10} \text{Н/м}^2)$   $c_{11} = 20,65$   $c_{12} = 15,25$ ;  $c_{13} = 10,45$ ;  $c_{23} = 35,15$ ;  $c_{44} = 8,45$ . Усі інші  $c_{ij} = 0$  як для включення, так і для середовища.

Локальний характер напружено-деформівного стану на поверхні трансверсально-ізотропного середовища з включенням у вигляді сфероїда зображено на рисунку.

**Висновки.** На основі аналізу отриманих числових результатів виявлено такі механічні особливості, зумовлені порушенням умов спаю на границі розділу фаз:

- наявність включення у формі стиснутого сфероїда в пружному трансверсально-ізотропному середовищі за неідеального механічного контакту у випадку поздовжнього розтягу вздовж осі OZ залежно від відношення осей сфероїда не суттєво впливає на концентрацію напружень, прямуючи до номінальних значень (суцільні криві);
- концентрація нормальних і кругових напружень має стискальний характер, прямуючи до номінальних значень із збільшенням співвідношення осей сфероїда (штрихові лінії).

### Бібліографічний список

1. Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46–48.
2. Бубняк Т. І. Розподіл напружень на поверхні порожнини у трансверсально-ізотропному середовищі. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2020. № 21. С. 5–9.
3. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности*: в 5 т. Київ: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.
4. Соколовський Я. И., Бубняк Т. И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вып. 25. С. 17–26.
5. Соколовський Я. И., Бубняк Т. И. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. *Доп. НАН України*. 1996. № 9. С. 45–50.

Стаття надійшла 10.05.2022