

УДК 539.3

**НАПРУЖЕННЯ В КОМПОЗИТАХ ПІД ЧАС НАГРІВАННЯ****Т. Бубняк, к. ф.-м. н.**

ORCID ID: 0000-0002-2814-8571

*Львівський національний університет природокористування*<https://doi.org/10.31734/architecture2023.24.015>**Бубняк Т. Напруження в композитах під час нагрівання**

Просторові задачі теорії пружності часто виникають під час вирішення різних технічних і технологічних проблем сучасного виробництва, зокрема під час побудови композитних матеріалів та елементів конструкцій.

Поведінку конструктивних матеріалів можна вивчати на трьох структурних рівнях: макро-, мікро- і атомарному. У будівельній механіці поняття суцільного середовища доречно тільки на мікрорівні. Врахування впливу неоднорідності матеріалу на цьому рівні при аналізі макронапружень суттєво залежить від розміру конструкції.

Зауважено, що під час створення композитних матеріалів включення, які виникають у матриці, суттєво впливають на напружено-деформівний стан композиту загалом за різних механічних чи теплових навантажень. Досягнення компонентами напружень екстремальних значень на межі розділу фаз обумовлено в одних випадках технологією виробництва, а в інших – неоднорідність вводиться для покращання міцності матеріалу.

Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з істотними математичними труднощами через складну побудову розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який ґрунтується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів. Розглянуто задачу про розподіл термонапружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда за рівномірного нагріву.

Доведено, що за рівномірного нагріву середовища  $T^0 = cZ$  напруження на поверхні включення мають локальний характер як уздовж осі  $X$ , так і вздовж осі  $Z$ . Концентрація напружень швидко згасає під час віддалення від поверхні включення, прямуючи до нульового значення.

**Ключові слова:** потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

**Bubniak T. Tension in composites during heating**

Spatial problems in the theory of elasticity often arise when solving various technical and technological problems in modern production. This is especially true when building composite materials and structural elements.

The behaviour of structural materials can be studied at three structural levels: macro-, micro-, and atomic level. In construction mechanics, the concept of continuous medium only has meaning at the micro level. The analysis of macrostresses significantly depends on the size of the structure itself, and consideration of the effect of material heterogeneity at this level.

When creating composite materials, the inclusions that appear in the matrix significantly affect the stress-strain state of the composite as a whole under various mechanical or thermal loads. The stress components can reach extreme values at the interface of phases in some cases due to the production technology, and in others, heterogeneity is introduced to improve the strength of the material.

The study of spatial problems of the static theory of elasticity and thermoelasticity for homogeneous isotropic and anisotropic bodies in the general formulation is associated with great mathematical difficulties due to the complexity of constructing a solution of a system of partial differential equations that satisfies the boundary conditions.

One effective method of solving problems of elasticity theory is the Fourier method. This method is based on the representation of general solutions of equilibrium equations through potential functions. The Fourier method uses different representations of the solution of the Lamé equations through harmonic functions, which allows the search for a solution in the form of series.

The paper discusses the problem of the distribution of thermal stresses in an unbounded transversely isotropic medium, which contains anisotropic inclusions in the form of a compressed spheroid with uniform heating, relative to mechanical and thermal properties.

The conducted studies show that with uniform heating of the medium, the stresses on the inclusion surface are local both along the  $X$ -axis and along the  $Z$ -axis. The tension concentration decreases rapidly when departing from the inclusion surface and approaches to zero value.

**Key words:** potential functions, transversally isotropic medium, imperfect contact, sphere, field of pressure.

**Постановка проблеми.** Просторові задачі теорії пружності часто виникають під час вирішення різних технічних і технологічних проблем сучасного виробництва, зокрема під час побудови композитних матеріалів та елементів конструкцій.

Поведінку конструктивних матеріалів можна вивчати на трьох структурних рівнях: макро-, мікро- і атомарному. У будівельній механіці поняття суцільного середовища доцільне тільки на мікрорівні. Врахування впливу неоднорідності матеріалу на цьому рівні під час аналізу макронапружень суттєво залежить від розміру конструкції. Із розвитком і впровадженням нових конструкційних матеріалів треба вміти оцінювати їхні міцнісні властивості за різних видів навантаження.

Під час створення композитних матеріалів включення, що виникають у матриці, суттєво впливають на напружено-деформівний стан композиту загалом за різних механічних чи теплових навантажень. Досягнення компонентами напружень екстремальних значень на межі розділу фаз обумовлено в одних випадках технологією виробництва, а в інших неоднорідність уводиться для покращання міцності матеріалу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складну побудову розв'язку системи диференціальних

рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який ґрунтується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів. Важливі результати в цьому напрямі отримані у працях В. Т. Грінченка, Ф. Д. Коваленка, Ю. М. Коляно, В. Л. Рвачова, І. О. Мотовиловця, К. В. Солянік-Красса, Я. С. Підстригала, Ю. М. Подільчука та багатьох інших, в яких побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

**Постановка завдання.** Наше завдання – розглянути задачу про розподіл термопружностей необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне відносно механічних і теплових властивостей включення у формі стиснутого сфероїда за рівномірного нагріву.

**Виклад основного матеріалу.** Одним із ефективних методів розв'язування просторових задач теорії пружності є метод Фур'є, який полягає у представленні загального розв'язку рівнянь рівноваги через потенціальні функції [1].

Розглянемо систему рівнянь задачі статичної термопружності за відсутності масових сил:

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial V}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial x}, \\
 & \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial U}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial y}, \\
 & c_{44} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \beta' \frac{\partial T}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta'' \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

де  $c_{ij}, \beta, \beta', \beta''$  – сталі, що характеризують механічні та теплові властивості тіла.

Розв'язок рівнянь (1) при дійсних різних коренях характеристичного рівняння виражається через чотири потенціальні функції [1; 2]:

$$U = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial y},$$

$$W = k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + k_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}. \quad (2)$$

Ці функції задовольняють умови

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0, \quad (j = \overline{1,4}), \quad \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = k_3 T, \quad (3)$$

де  $v_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$ ,  $v_4 = \beta''$ , а величини  $v_1, v_2$  – корені відповідного характеристичного рівняння [3].

Під час розв'язування просторових задач теорії пружності зі сфероїдальними включеннями, зокрема тут, зручно застосовувати системи координат для стиснутого сфероїда [2]  $(\eta_j, \theta_j, \varphi)$ :  
 $x = a_j c \eta_j \sin \theta_j \cos \varphi, \quad y = a_j c \eta_j \sin \theta_j \sin \varphi, \quad z = \lambda_j a_j \operatorname{sh} \eta_j \cos \theta_j,$  при чому  
 $(0 \leq \eta_j < \infty, \quad 0 \leq \theta_j < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$

Введемо позначення:  $c \eta_j = q_j, \operatorname{sh} \eta_j = \bar{q}_j, \cos \theta_j = p_j, \sin \theta_j = \bar{p}_j, c \eta_{j0} = q_{j0}, \operatorname{sh} \eta_{j0} = \bar{q}_{j0}$ .

На граничній поверхні сфероїда  $(\eta_j = \eta_{j0} = \text{const})$  виконуються рівності

$$a_1 q_{10} = a_2 q_{20} = a_3 q_{30}, \quad \lambda_1 a_1 \bar{q}_{10} = \lambda_2 a_2 \bar{q}_{20} = \lambda_3 a_3 \bar{q}_{30},$$

що забезпечують збіг граничних поверхонь.

Позначимо температуру, пружні характеристики, коефіцієнти лінійного розширення і теплопровідності трансверсально-ізотропного середовища  $T^0, c_{ij}, \alpha, \alpha_1, \lambda, \lambda_1$ ; а через  $T', c'_{ij}, \alpha', \alpha'_1, \lambda', \lambda'_1$  – відповідні характеристики включення. Для ідеального теплового контакту  $T^0 = T'$ . За дії температури  $T^0$  в середовищі виникають переміщення

$$U^0 = T^0 d_1 x, \quad V^0 = T^0 d_1 y, \quad W^0 = T^0 d_2 z, \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{де } d_1 = \frac{c_{13}(2\alpha c_{13} + \alpha_1 c_{33}) - \alpha c_{33}(c_{11} + c_{12})}{2c_{13}^2 - c_{33}(c_{11} + c_{12})}, \quad d_2 = \frac{2\alpha c_{13}(c_{11} + c_{12}) - (c_{11} + c_{12})(2\alpha c_{13} + \alpha_1 c_{33})}{2c_{13}^2 - c_{33}(c_{11} + c_{12})}.$$

Для ідеального контакту маємо граничні умови на поверхні  $(\eta_j = \eta_{j0})$ :

$$\sigma_{ij} \eta_j = \sigma'_{ij} \eta_j, \quad \bar{U}(T^0) + \bar{U}_q = \bar{U}'(T^0) + \bar{U}' \quad (5)$$

Припустимо, що переміщення у включенні мають теж лінійний характер

$$U' = A_1 T'_1 x, \quad V' = A_1 T'_1 y, \quad W' = C_1 T'_2 z, \quad (6)$$

де  $A_1, C_1$  – поки що невідомі величини.

Враховуючи формули (4-6), отримаємо переміщення на поверхні сфероїда при додатковому напруженому стані

$$U_q = -(A_1 - d_1) T'_1 a_j q_{j0} P_1^{(1)}(p_j) \cos \varphi;$$

$$V_q = -(A_1 - d_1) T'_1 a_j q_{j0} P_1^{(1)}(p_j) \sin \varphi; \quad (7)$$

$$W_q = (C_1 - d_2)T' \lambda_j a_j \overline{q_{j0}} P_1(p_j).$$

У включенні додатковий напружений стан описується переміщеннями

$$U_j = \frac{a_{10}^{(j)}}{4a_j} P_1^{(1)}(p_j) Q_1^{(1)}(\overline{iq_j}) \cos \varphi;$$

$$V_j = \frac{a_{10}^{(j)}}{4a_j} P_1^{(1)}(p_j) Q_1^{(1)}(\overline{iq_j}) \sin \varphi; \quad (8)$$

$$W_j = \frac{k_j}{2a_j \lambda_j} P_1(p_j) Q_1(\overline{iq_j}) a_{10}^{(j)}, \quad j=1,2; \quad i^2 = -1.$$

Невідомі величини  $a_{10}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \frac{2}{a_j} Q_1^{(1)}(\overline{iq_{j0}}) a_{10}^{(j)} = -8a_j q_{j0} (A_1 - d_1) T', \\ \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{a_j \lambda_j} Q_1(\overline{iq_{j0}}) a_{10}^{(j)} = 2\lambda_j a_j \overline{q_{j0}} (C_1 - d_2) T'. \end{cases} \quad (9)$$

Аналітичні розрахунки дають компоненти напружень у середовищі біля включення, вздовж осі  $Z$  ( $\theta_j = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \sum_{j=1,2} \left( \frac{c_{13}}{v_j} k_j - \frac{c_{11} + c_{13}}{2} \right) \left( Q_0(\overline{iq_j}) - \frac{\overline{q_j}}{q_j^2} \right) \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2}, \\ \sigma_z &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} \left( Q_0(\overline{iq_j}) - \frac{\overline{q_j}}{q_j^2} \right) \left( c_{33} \frac{k_j}{v_j} - c_{13} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогічно напруження вздовж осі  $X$  ( $\theta_j = 90^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{a_j^2 q_j q_j^2}, \\ \sigma_x + \sigma_y &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} \left( c_{11} + c_{12} - 2c_{13} \frac{k_j}{v_j} \right) \left( \frac{1}{q_j} - Q_0(\overline{iq_j}) \right), \\ \sigma_z &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} Q_0(\overline{iq_j}) \left( c_{33} \frac{k_j}{v_j} - c_{13} \right). \end{aligned} \quad \dots(11)$$

Числові розрахунки зроблені для матеріалів із такими пружними і тепловими характеристиками: трансверсально-ізотропне середовище

$$c_{11} = 5,97; c_{12} = 2,62; c_{13} = 2,17; c_{33} = 6,17; \lambda = 61,06; \lambda_1 = 80,84; \alpha = 5,0; \alpha_1 = 3,5;$$

трансверсально-ізотропне включення

$$c'_{11} = 12,1; c'_{12} = 4,81; c'_{13} = 4,42; c'_{33} = 5,13; \lambda' = 66,96; \lambda'_1 = 78,0; \alpha' = 27,0; \alpha'_1 = 34.$$

Характер концентрації нормальних, меридіальних і кругових напружень уздовж осі  $X$  можна побачити на рис. 1. На рис. 2 зображено розподіл напружень уздовж осі  $Z$ .

**Висновки.** Проведені дослідження свідчать про те, що за рівномірного нагріву середовища

$T^0 = cz$  напруження на поверхні включення  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  ( $a = b = 4, c = 2$ ) мають локальний

характер як уздовж осі  $X$ , так і вздовж осі  $Z$ . Концентрація напружень швидко згасає при віддаленні від поверхні включення, прямуючи до нульового значення.

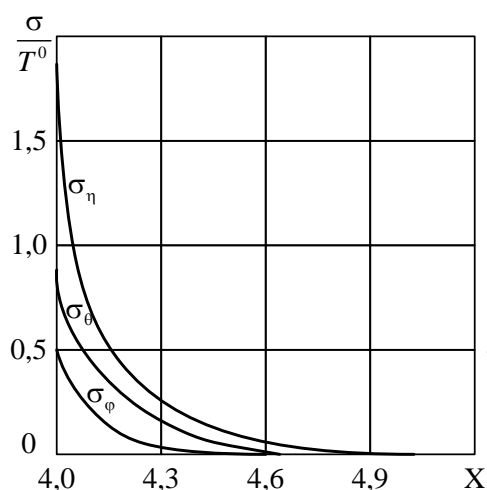


Рис. 1

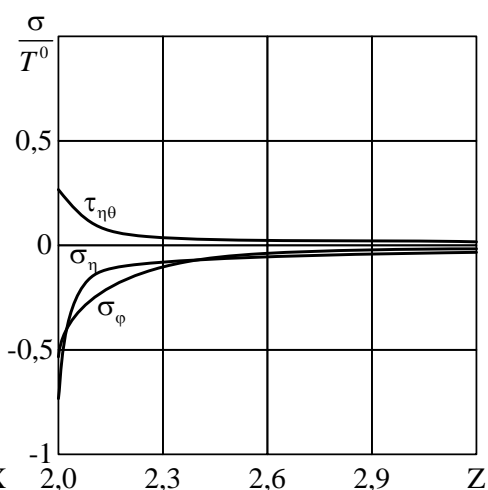


Рис. 2

### Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 5 т. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.
2. Соколовський Я. І., Бубняк Т. І. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вып. 25. С. 17–26.
3. Бубняк Т. І., Бубняк І. Т. Ріст напружень в околі сфероїдального включення. *Вісник Львівського державного аграрного університету: архітектура і*

*сільськогосподарське будівництво*. 2007. № 8. С. 21–25.

4. Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46–48.

5. Бубняк Т. І. Розподіл напружень на поверхні порожнини у трансверсально-ізоотропному середовищі. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2020. № 21. С. 5–9.

Стаття надійшла 08.05.2023