

УДК 593.3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТНИХ КЛИНОПОДІБНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Микола Махоркін<sup>1,3</sup>, к. ф.-м. н., Тетяна Махоркіна<sup>2</sup>, к. ф.-м. н.,  
Петро Пукач<sup>3</sup>, д. т. н.

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова 3-б, м. Львів, Україна,  
e-mail: mahorkin@ukr.net

<sup>2</sup> Львівський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл., Україна,  
e-mail: mechanic@ua.fm

<sup>3</sup> Національний університет "Львівська політехніка",  
вул. С. Бандери 12, м. Львів, Україна,  
e-mail: petro.y.pukach@lpnu.ua

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2020.24.121>

**Махоркін М., Махоркіна Т., Пукач П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій**

Напружено-деформований стан конструктивних елементів типу однорідного клина чи пластини з клиноподібним вирізом за антиплоскої деформації доволі ґрунтовно досліджений, чого не можна сказати про ті елементи, що можуть бути змодельовані як клинові композити. У статті викладено методика, яка дає змогу записати відповідні сингулярні інтегральні рівняння для визначення напружено-деформованого стану в композиті, складеному з довільної кількості з'єднаних між собою клинів, що сходяться в одній точці, а на лініях їх з'єднання розташовані скінченні дефекти.

Запропонована методика ґрунтується на методі постановки узагальненої задачі спряження та методі функції стрибка, згідно з якими багатоклиновий композит розглядається як єдине ціле, його фізико-механічні характеристики описуються кусково-постійними функціями виду  $p(\varphi) = p_1 + \sum_{i=1}^n (p_{i+1} - p_i) S_+(\varphi - \varphi_i)$ , ( $p = \{w, \mu\}$ ,

$S_+ = \{1 (\xi > 0); 0 (\xi \leq 0)\}$  – функція Гевісайда), а радіально розташовані дефекти моделюють стрибками напружень та переміщень –  $(w_{i+1} - w_i)|_{\varphi_i} = f_{1i}(r)$ ,  $(\sigma_{i+1} - \sigma_i)|_{\varphi_i} = f_{2i}(r)$ ,  $f_{1i}(r) = f_{2i}(r) = 0$ ,  $r \in (a_i; b_i)$ ,  $((a_i; b_i)$  – область, яку займає включення). Такий підхід зводить визначення напружено-деформованого стану в багатоклиновому композиті за поздовжнього зсуву до розв'язування крайової задачі для одного частково виродженого диференціального рівняння.

У статті докладно описано запропоновану методика та з її допомогою записано в трансформантах Мелліна поля напружень і переміщень у композитному клині. Розглянуто задачу про напружено-деформований стан двоклинової системи з радіальною тріщиною скінченної довжини за дії зосередженого зсувного навантаження. Побудовано сингулярне інтегральне рівняння для визначення поля переміщень у такій системі та запропоновано алгоритм його зведення до рівняння з ядром типу Коші. Це рівняння аналітично розв'язано у випадку системи, складеної з двох клинів з однаковими кутами розхилу. Досліджено поля напружень поблизу кінців міжфазної тріщини в такій системі.

**Ключові слова:** композитний клин, багатоклинова система, узагальнені функції, радіальні дефекти, асимптотики напружень, коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Makhorkin M., Makhorkina T., Pukach P. Mathematical modeling of the stress-strain state of composite wedge-shaped structural elements**

The stress-strain state of structural elements such as a homogeneous wedge or a plate with a wedge-shaped cut under antiplane shear deformation has been thoroughly studied. However, it is not true for those elements that can be modeled as composite wedge. This paper describes a procedure that allows writing the singular integral equations to determine the stress-strain state in a composite, composed of any number of interconnected wedges that converge at one point, and there are finite defects on the lines of their connection.

The proposed method is based on the method of the generalized conjugation problem and of the jump function method, according to which the multi-wedge composite is considered as a whole, and its physical-mechanical characteristics are

described by piecewise constant functions –  $p(\varphi) = p_1 + \sum_{i=1}^n (p_{i+1} - p_i) S_+(\varphi - \varphi_i)$ , ( $p = \{w, \mu\}$ ,  $S_+ = \{1 (\xi > 0); 0 (\xi \leq 0)\}$

- the Heaviside function), and the radially located defects are modelled by the stress and displacements jumps –  $(w_{i+1} - w_i)|_{\varphi_i} = f_{1i}(r)$ ,  $(\sigma_{i+1} - \sigma_i)|_{\varphi_i} = f_{2i}(r)$ ,  $f_{1i}(r) = f_{2i}(r) = 0$ ,  $r \in (a_i; b_i)$ , ( $(a_i; b_i)$  is the area occupied by the inclusion).

That approach reduces the definition of the stress-strain state in a multi-wedge composite under longitudinal shear to the solution of the boundary value problem for one partially degenerated differential equation.

The work supplies a detailed description of the proposed technique, and with its help the stress and displacement fields in a composite wedge are written in the form of the Mellin transformants. The problem of the stress-strain state of a two-wedge system with a radial crack of finite length under the action of a concentrated shear load is considered in the research. A singular integral equation for determining the displacement field in such system is constructed and an algorithm of reducing it to an equation with a Cauchy kernel is proposed. This equation is analytically solved in the case of a system consisting of two wedges with the same opening angles. The stress fields near the ends of the interfacial crack in such a system are investigated.

**Key words:** composite wedge, multi-wedge system, generalized functions, radial defects, stress asymptotes, mode III stress intensity factor.

**Постановка проблеми.** Надійність і довговічність транспортних засобів та устаткування залежать не тільки від технології виготовлення і умов експлуатації, а й від конструктивних параметрів їхніх деталей. Такими параметрами можуть виступати їхній профіль, матеріал виготовлення, наявність гострокінцевих включень чи вирізів або особливості межі поділу матеріалів у композитних деталях. Врахування впливу цих параметрів є важливою задачею в проєктуванні різноманітних конструкцій та їхніх елементів. Для цього необхідно з'ясувати повні, об'єктивні й достовірні дані про процеси руйнування, а саме зародження тріщин, та подальший напрям їх розвитку. Такі дані отримують у результаті коштовних експериментів з руйнування зразків або за допомогою математичного моделювання фізико-механічних полів усередині об'єкта досліджень.

Досліди свідчать, що порушення працездатності деталей конструкцій, як правило, має місце внаслідок руйнування, яке відбувається передусім в околі концентраторів напружень, у тому числі й особливих точок (з'єднання двох чи більше матеріалів, виходу на цю межу тонких дефектів, кінців тонких неоднорідностей усередині матеріалу тощо). У машинобудівному проєктуванні такими концентраторами можуть серед усього іншого бути різноманітні отвори, канавки, пази, зачеплення зубів коліс у зубчастих передачах механізмів трансмісії, ламані межі з'єднання в композитних елементах. Тому вміння розрахувати напружено-деформований стан в околі концентраторів є необхідним для прогнозування міцності деталей та конструкцій у цілому.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Як правило, напружений стан в околі особливих

точок вивчають за допомогою певних модельних задач, а саме клинових структур з радіальними дефектами чи без них [7; 11; 13; 19]. Вивченню таких задач було приділено багато уваги: сингулярність та асимптотики напружень в околі вершини кутового вирізу пружної ізотропної матриці або однорідного клина вивчалися в роботах [2; 10–12; 22]; для клинових композитів, складених із двох та трьох матеріалів, сингулярність напружень проаналізовано в працях [2; 12; 17; 18] (плоска задача) та [5; 16; 20; 21] (антиплоска). Питання про вплив на напружений стан клинової системи наявності в ній тонких радіальних дефектів розглядалося в роботах [7; 8]. Під час розв'язування згаданих задач використовували переважно методи комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі [18], функції напружень Ері [17; 20] та метод сингулярних інтегральних рівнянь [7; 19]. Однак вони призводили до громіздких виразів, які утруднювали отримання аналітичного запису асимптотик напружено-деформованого стану навіть для композиту, складеного з двох клинів. Тому обмежувалися вивченням лише порядку сингулярності. Застосування перетворення Мелліна [2; 20; 21] дещо спростило загальний вигляд виразів і уможливило – у часткових випадках антиплоскої задачі теорії пружності для двох клинів – визначення коефіцієнта інтенсивності напружень в околі вершини клинової системи [21]. Проте й надалі збереглися проблеми зі записом асимптотики для довільної кількості елементів композиту. Відкритим також залишається питання про напруження в околі кінців тонкого міжфазного дефекту в багатоклиновій системі.

**Постановка завдання.** Докладно описати розроблений авторами підхід до розв'язання

задачі про напружено-деформований стан композитного клина з радіально розташованими тонкими дефектами за умов поздовжнього зсуву. Записати у трансформантах Мелліна поля напружень та переміщень у композиті, складеному з довільної кількості клинів. Обґрунтувати правомірність поняття узагальненого коефіцієнта інтенсивності напружень для багатоклинової системи. Розв'язати задачу про напружено-деформований стан двокомпонентного композитного клина з міжфазною радіальною тріщиною скінченної довжини за дії зосередженого зсувного навантаження. Дослідити поля напружень поблизу кінців міжфазної тріщини в композитному клині, складеному з двох клинів з однаковими кутами розхилу.

**Виклад основного матеріалу.** Конструкційні елементи типу композитного клина моделюємо системою, складеною з довільної кількості  $n$  зчеплених між собою різномірних пружних, ізотропних клинів  $S_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) з кутами розхилу при вершині  $\alpha_i$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq 2\pi$ ) та кутового вирізу  $S_{n+1}$  з кутом розхилу  $\alpha_{n+1} = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n$  (рис. 1), який перебуває в умовах поздовжнього зсуву  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = w(r, \varphi)$ . На лініях зчеплення клинів (їх визначають полярні координати  $\varphi = \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ ) розташовані тонкі прямолінійні дефекти, серединні лінії яких є відрізками  $r \in [a_i; b_i]$ . Береги вирізу перебувають під дією навантаження, що забезпечує умови поздовжнього зсуву.

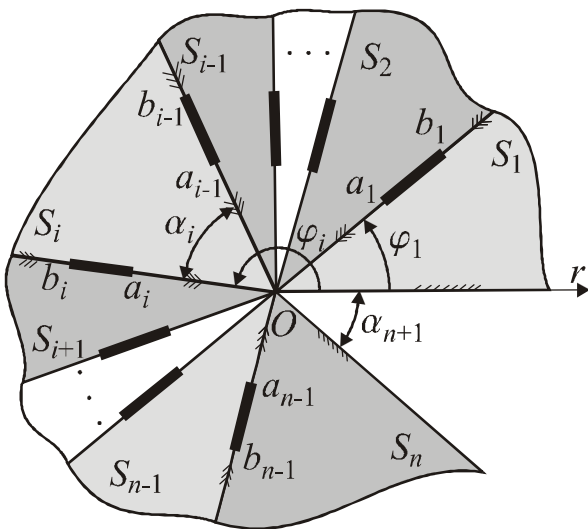


Рис. 1. Загальна схема задачі  
Fig. 1. General chart of the problem

Отже, для з'ясування напружено-деформованого стану системи скористаємося тим, що для кожного з  $n$  її елементів виконуються співвідношення Коші, закон Гука та рівняння рівноваги

$$\mu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{\mu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} + \frac{\mu_i}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (1)$$

де  $w_i, \sigma_{rz}^i, \sigma_{\varphi z}^i$  – переміщення та напруження в  $i$ -му елементі;  $\mu_i$  – модуль зсуву матеріалу  $i$ -го елемента.

На лініях зчеплення клинів  $\varphi = \varphi_i$  задані умови спряження

$$\begin{aligned} (\sigma_{\varphi z}^{i+1} - \sigma_{\varphi z}^i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} &= f_{\sigma_i}(r) N_i(r), \\ (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} &= f_{w_i}(r) N_i(r). \end{aligned} \quad (2)$$

де  $f_{\sigma_i}(r), f_{w_i}(r)$  – функції стрибка, за допомогою яких наявність тонких міжфазних неоднорідностей описано відповідно до [3; 6] так:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_i+0} - \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_i-0} &= f_{\sigma_i}(r) N_i(r), \\ w \Big|_{\varphi=\varphi_i+0} - w \Big|_{\varphi=\varphi_i-0} &= f_{w_i}(r) N_i(r), \end{aligned}$$

де  $N_i(r) = S_+(r - a_i) - S_+(r - b_i)$ ,

$$S_+ = \{1 (\xi > 0), 0 (\xi \leq 0)\}.$$

На поверхнях системи, відповідно до виду навантаження, задані крайові умови першого, другого або третього роду.

Згідно з методикою постановки узагальненої задачі спряження [8], клинову систему будемо розглядати як єдину область  $S$ , складену з  $n$  областей  $S_i$ , у межах кожної з яких виконуються співвідношення (1), а на поверхнях поділу  $\varphi = \varphi_i$  задані умови спряження (2).

Продовжимо функцію переміщень  $w_i(r, \varphi)$ ,

диференціальні оператори  $\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}, \frac{\partial w_i}{\partial r}$  та сталі в області  $S_i$  коефіцієнти  $\mu_i$  на всю область  $S$  у вигляді [4; 16]:

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \frac{\partial w}{\partial r}, w, \mu \right\} \sim f(r, \varphi), \quad (3)$$

$$f(r, \varphi) = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) S_+(\varphi - \varphi_i).$$

Врахувавши зв'язок між узагальненими і класичними похідними [4] та умови спряження (2), замість системи  $n$  рівнянь (1) з умовами спряження (2) отримаємо частково вироджене диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \\ = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} C_1^i(r) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} C_2^i(r) \delta_+(\varphi - \varphi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

із крайовими умовами типу

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \frac{r}{\mu_1} \tau_0(r), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{r}{\mu_n} \tau_{n+1}(r), \quad (5)$$

$$w|_{\varphi=0} = w_0(r), \quad w|_{\varphi=\varphi_n} = w_{n+1}(r).$$

$$\text{Тут } C_2^i(r) = \frac{2rf_{wi}(r)}{\mu_{i+1}} N_i(r) - \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} \left. \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i=0},$$

$$C_1^i(r) = f_{wi}(r) N_i(r).$$

Таким чином, з'ясування напружено-деформованого стану в клиновій системі за поздовжнього зсуву зводиться до розв'язування частково виродженого диференціального рівняння (4) з крайовими умовами типу (5), сформульованими відповідно до типу навантаження. Таку задачу відповідно до [4] називатимемо узагальненою задачею спряження.

Для відшукування загального розв'язку крайової задачі (4) – (5) скористаємося перетворенням Мелліна. У результаті його застосування рівняння (4) набуде такого вигляду [15; 16]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \varphi} + p^2 \tilde{w} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_1^i(r) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_2^i(r) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad (6)$$

$$\tilde{f}_{ki} = \int_0^\infty f_{ki}(r) N_i(r) r^{p-1} dr \quad (k = w, \sigma; i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\tilde{C}_1^i(p) = \tilde{f}_{wi}(p), \quad \tilde{C}_2^i(p) = \frac{\tilde{f}_{\sigma i}(p+1)}{\mu_{i+1}} - \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} \left. \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i=0}.$$

Відтак згідно з розв'язком рівняння (6) трансформанта Мелліна [8] переміщень матиме такий вигляд:

$$\tilde{w}(p, \varphi) = A(p) \psi_A(p, \varphi) + B(p) \psi_B(p, \varphi) + \psi_C(p, \varphi), \quad (7)$$

де

$$\psi_A(p, \varphi) = \cos p\varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{p\mu_{i+1}} L_1^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$\psi_B(p, \varphi) = \sin p\varphi - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{p\mu_{i+1}} L_2^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$\psi_C(p, \varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \tilde{f}_{\sigma i}(p+1) - (\mu_{i+1} - \mu_i) L_3^i \right) (p\mu_{i+1})^{-1} \times \sin[p(\varphi - \varphi_i)] + \tilde{f}_{wi}(p) \cos[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$L_1^i = -p \sin p\varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1}} L_1^k \cos[p(\varphi_i - \varphi_k)],$$

$$L_2^i = p \cos p\varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1}} L_2^k \cos[p(\varphi_i - \varphi_k)],$$

$$L_3^i = \sum_{k=1}^{i-1} \left( \frac{\tilde{f}_{\sigma k}(p+1)}{\mu_{k+1}} \cos[p(\varphi_i - \varphi_k)] - \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1}} L_3^k \right) \times \cos[p(\varphi_i - \varphi_k)] - p \tilde{f}_{wk}(p) \sin[p(\varphi - \varphi_i)], \quad L_3^1 = 0.$$

Невідомі функції  $A(p)$  та  $B(p)$  визначаються з відповідних крайових умов, трансформованих за Мелліном.

Застосувавши до поданої у вигляді (7) трансформанти розв'язку задачі (4) – (5) обернене перетворення Мелліна, отримаємо такі співвідношення для обчислення переміщень і напружень у кусково-однорідному клиновому композиті:

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p} dp,$$

$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{\mu}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp, \quad (8)$$

$$\sigma_{rz}(r, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp.$$

Як правило, для відшукування оригіналу перетворення Мелліна у всій області  $S$  використовують теорему про лишки, що пов'язане з визначенням множини коренів трансцендентного рівняння  $\Delta_i(p) = 0$  [8]. Однак для побудови асимптотик напружень та переміщень, в околі вістря клинової системи достатньо взяти лише те значення  $p$ , що забезпечує максимальну сингулярність напружень. Оскільки поле напружень при  $r \rightarrow 0$  має особливість порядку  $r^{-(1+\text{Re}(p))}$ , а при  $r \rightarrow \infty$  зникає і енергія у вістрі клинової системи обмежена, у праці [2] зроблено висновок, що для з'ясування асимптотичного поведіння напружень в околі вістря достатньо знайти лишок (7) у значенні  $\text{Re}(p) = \max(\text{Re}(p)) \in (-1; 0)$ .

За наявності тонкої міжфазної неоднорідності у співвідношеннях (8) фігурують невідомі функції стрибка. Їх визначають зі системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку формують на підставі умов взаємодії включення та матриці, в яку воно внесено [3; 19]. Зокрема, у разі навантаженої тріщини ці умови мають такий вигляд:

$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi_i + 0) - \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_i - 0) = f_{\sigma i}(r) N_i(r),$$

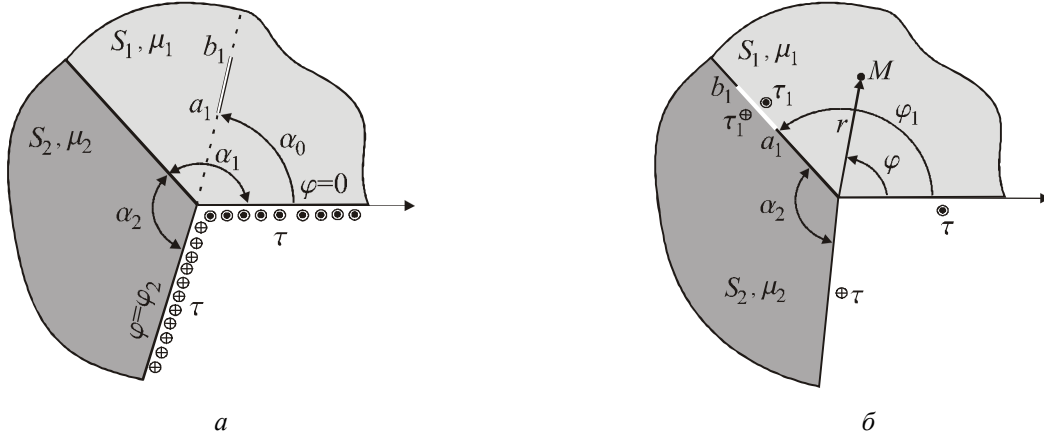
$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi_i + 0) + \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_i - 0) = f_{\sigma i}^*(r) N_i(r). \quad (9)$$

Розглянемо складену з двох клинів систему (рис. 2, а) з кутами розхилу  $\alpha_1, \alpha_2$ , навантажену на її берегах зусиллям  $\tau(r)$ . Усередині одного з клинів (наприклад,  $S_1$ ), на радіальній прямій  $\varphi = \alpha_0$  розташована неоднорідність.

Таку систему моделюємо триклиновим композитом з радіальним дефектом на одній із ліній спаю, причому клини, на лінії спаю яких розташований дефект, мають однакові пружні властивості (див. рис. 2, а).

Для визначеності розглядатимемо дефект типу тріщини. Стрибок напружень у разі симетрично навантаженої зусиллям  $\tau_1(r)$  тріщини дорівнюватиме  $f_\sigma(r)=0$ , а стрибок переміщень

$f_w(r)$  буде невідомий. Якщо би розглядали жорстке включення, то відомим був би саме стрибок переміщень, а невідомим – стрибок напружень. На берегах кутового вирізу система буде навантажена зусиллями  $\tau(r)$ . Оскільки тріщина розташована в першому клині  $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ , то  $n=3$ ,  $\mu_2 = \mu_1$ ,  $\varphi_1 = \alpha_0$ ,  $\varphi_2 = \alpha_1$ ,  $\varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $f_{\sigma i}(r) = 0$ , ( $i=1,2$ )  $f_{w2}(r) = 0$ .



**Рис. 2.** Двоклинова система з радіальним дефектом, розташованим довільно (а) та на лінії з'єднання двох клинів (б)  
**Fig. 2.** Two-wedge system with a radial defect, located arbitrarily (a) and on the line of two wedges connection (б)

За таких умов трансформанта переміщень (7) матиме такий вигляд:

$$\tilde{w}(p, \varphi) = [\tilde{g}_{A1}(p) \tilde{g}_1(p, \varphi) + \tilde{g}_{B1}(p) \tilde{g}_2(p, \varphi)] \times \times \tilde{\tau}(p+1) + \tilde{f}_{w1}(p) [p \tilde{g}_{A2}(p) \tilde{g}_1(p, \varphi) + \tilde{g}_3(p, \varphi)], \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(p, \varphi) &= \left( \cos p\varphi - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{p\mu_{i+1}} L_1^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i) \right), \\ \tilde{g}_2(p, \varphi) &= \left( \sin p\varphi - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{p\mu_{i+1}} L_2^i \sin[p(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i) \right) \\ \tilde{g}_3(p, \varphi) &= \cos[p(\varphi - \varphi_1)] S_+(\varphi - \varphi_1) + \\ &+ \mu_3^{-1} (\mu_3 - \mu_1) \sin[p(\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot \\ &\cdot \sin[p(\varphi - \varphi_2)] S_+(\varphi - \varphi_2), \\ \tilde{g}_{A1}(p) &= (\mu_3 \mu_1 \Delta_1(p))^{-1} (\mu_1 - \mu_3 \cos[p\varphi_3] + \\ &+ (\mu_3 - \mu_1) \cos[\varphi_2] \cos[p(\varphi_3 - \varphi_2)]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -p \sin p\varphi_3 - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[p(\varphi_n - \varphi_i)], \\ \tilde{g}_{B1}(p) &= (p\mu_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Щоб визначити невідому функцію стрибка  $f_{w1}(r)$ , скористаємося умовами взаємодії (9). Врахувавши формули обернення Мелліна та теорему про згортку, отримаємо таке інтегральне рівняння для визначення функції стрибка:

$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi_1) = \mu_1 G(r) - \mu_1 \int_{a_1}^{b_1} f'_{w1}(t) K\left(\frac{r}{t}\right) dt = r\tau_1(r), \quad (11)$$

з умовою

$$\int_{a_1}^{b_1} f'_{w1}(r) dr = 0. \quad (12)$$

Тут:

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{G}(p) r^{-p} dp, K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{K}(p) x^{-p} dp \\ \tilde{G}(p) &= \tilde{\tau}(p+1) [\tilde{g}_{A1}(p) \tilde{g}_4(p, \varphi_1) + \tilde{g}_{B1}(p) \tilde{g}_5(p, \varphi_1)], \\ \tilde{K}(p) &= \tilde{g}_{A2}(p) \tilde{g}_4(p, \varphi_1) + \tilde{g}_6(p, \varphi_1), \quad r \in (a_1; b_1), \\ \tilde{g}_4(p, \varphi) &= \left( -p \sin p\varphi - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \cos \left[ p(\varphi - \varphi_i) \right] S_+(\varphi - \varphi_i) \Big),$$

$$\tilde{g}_5(p, \varphi) = \left( p \cos p\varphi - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos \left[ p(\varphi - \varphi_i) \right] S_+(\varphi - \varphi_i) \right),$$

$$\tilde{g}_6(p, \varphi) = -\sin \left[ p(\varphi - \varphi_1) \right] S_+(\varphi - \varphi_1) +$$

$$+ \mu_3^{-1} (\mu_3 - \mu_1) \cos \left[ p(\varphi - \varphi_2) \right] \sin \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right] S_+(\varphi - \varphi_2),$$

$$\tilde{g}_{A2}(p) = (\Delta_1(p))^{-1} \sin \left[ p(\varphi_3 - \varphi_1) \right] +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_3) p \cos \left[ p(\varphi_3 - \varphi_2) \right] \sin \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right] (\mu_3 \Delta_1(p))^{-1}.$$

Розглянемо алгоритм, який уможливило зведення рівняння (11) до сингулярного інтегрального рівняння з ядром типу Коші у випадку двоклинової системи з міжфазною тріщиною  $\alpha_0 = \alpha_1$  (див. рис. 2, а). У цьому разі відповідне інтегральне рівняння (8) набуде такого вигляду:

$$\frac{\mu_1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \tilde{f}_{w1}(p) p \tilde{K}(p) r^{-p} dp = rP(r), \quad (13)$$

$$\tilde{K}(p) = \frac{\mu_2 \sin \left[ p\varphi_1 \right] \sin \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right]}{(\mu_1 - \mu_2) \cos \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ p\varphi_1 \right] + \mu_2 \sin \left[ p\varphi_2 \right]},$$

який з використання теорему про згортку [9] зводиться до вигляду (11)

$$- \mu_1 \int_{a_1}^{b_1} f'_{w1}(t) K \left( \frac{r}{t} \right) dt = rP(r) \quad (a_1 < r < b_1). \quad (14)$$

Врахувавши властивості перетворення Мелліна [1; 9] та теорему про лишки [9], запишемо для (13):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \tilde{f}_{w1}(p) p r^{-p} dp = -r f'_{w1}(r), \quad (15)$$

$$K(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu_2 \sin \left[ p\varphi_1 \right] \sin \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right]}{(\mu_1 - \mu_2) \cos \left[ p(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ p\varphi_1 \right] + \mu_2 \sin \left[ p\varphi_2 \right]} r^{-p} dp =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p) r^{-p}, p_n \right\}$$

Зважаючи та той факт, що розв'язок характеристичного рівняння для двоклинової системи є періодичним з періодом  $\Pi$ , для ядра рівняння (13) можна стверджувати, що  $\tilde{K}(p_{i+n}) = \tilde{K}(p_i + \Pi n)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , а отже –

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p) r^{-p}, p_n \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k r^{\Pi n} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p) r^{-p}, p_i + \Pi n \right\} \quad (17)$$

Відтак, обчисливши границю ряду (17) по  $n$ , інтеграл (16) обчислюватиметься за такою формулою:

$$K(r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k r^{-Tn} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p) r^{-p}, p_i \right\} =$$

$$= - \frac{1}{1 - r^{-\Pi}} \sum_{i=0}^k r^{-p_i} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p), p_i \right\} \quad (18)$$

У тих випадках, коли характеристичне рівняння має аналітичний розв'язок [14], границю ряду (18) можна обчислити точно, в інших випадках для визначення розв'язків та їх періоду слід застосовувати числові методи [15; 16].

Застосувавши до (13) теорему про згортку та врахувавши (15), (18), після низки перетворень перепишемо рівняння у вигляді (14) з ядром типу Коші:

$$\mu_1 \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{f}'_{w1}(t) r^{\Pi}}{r^{\Pi} - t^{\Pi}} \sum_{i=0}^k \left( \frac{r}{t} \right)^{-p_i} \text{Res} \left\{ \tilde{K}(p), p_i \right\} dt = rP(r). \quad (19)$$

Це рівняння розв'язується відомими числовими методами (наприклад, метод механічних квадратур [3; 4]), на описі яких у цій статті не зупинятимеся.

В окремих випадках рівняння (11) можна звести до сингулярного інтегрального рівняння типу Коші, для якого існує аналітичний розв'язок. Скажімо, якщо два клини, навантажені на берегах вирізу у точках із координатами  $\varphi = 0$ ,  $r = r_0$  та  $\varphi = \varphi_3$ ,  $r = r_0$  протилежно спрямованими зсувними зосередженими силами однакової величини  $T$  ( $\tau(r) = T\delta(r - r_0)$ ), мають однакові кути розхилу при вершині  $\alpha_1 = \alpha_2$ , а дефект, розташований на їх лінії зчеплення,  $\alpha_0 = \alpha_1$  (рис. 2, б), тоді у співвідношеннях (10) слід вважати  $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha_1$ ,  $\varphi_3 = 2\varphi_1$ ,  $\tilde{\tau}(p+1) = Tr_0^p$ , а складові рівняння (11) набудуть такого вигляду:

$$m = \pi / 2\varphi_1, \quad K(x) = \mu_3 x^m \left[ \varphi_1 (\mu_3 + \mu_2) (1 - x^{2m}) \right]^{-1},$$

$$G(r) = r^m r_0^m T \left[ \mu_1 \varphi_1 (r_0^{2m} + r^{2m}) \right]^{-1}.$$

Відтак після заміни змінних

$$t^{2m} = \xi, \quad r^{2m} = \eta, \quad a_1^{2m} = c, \quad b_1^{2m} = d,$$

$$d\xi = \frac{t^{1-2m} dt}{2m}, \quad t^{1-m} f'_{w1}(t) = \phi(\xi),$$

$$P(\eta) = \left[ r_0^m T (r_0^{2m} + \eta) \right]^{-1} - \varphi_1 \eta^{(1/2m)-0.5} \tau_1 \Big).$$

$$\cdot 2m (\mu_3 + \mu_2) (\mu_1 \mu_3)^{-1},$$

рівняння (11) і умова (12) набувають такого вигляду:

$$\frac{1}{i\pi} \int_c^d \frac{\phi(\xi)}{(\xi - \eta)} d\xi = \frac{P(\eta)}{i\pi}, \quad \int_c^d \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi = 0 \quad (c < \eta < d). \quad (20)$$

Якщо на берегах тріщини в точках  $\varphi = \varphi_1 \pm 0$ ,  $r = r_1$  ( $a_1 < r_1 < b_1$ ) прикладені зосереджені зсувні сили  $T_1$ , то  $\tau_1(r) = T_1 \delta(r - r_1)$  і розв'язок рівняння (20) можна подати у вигляді [6]:

$$\phi(\eta) = \left( \pi \sqrt{(d - \eta)(\eta - c)} \right)^{-1} (C - I\pi^{-1}) \quad (21)$$

$$I = (r_1^{2m} - \eta)^{-1} 2m\mu_e\varphi_1 T_1 \sqrt{(d - r_1^{2m})(r_1^{2m} - c)} r_1^m + \\ + \left( \mu_e \pi r_0^m T - (\eta + r_0^{2m})^{-1} \mu_e \pi r_0^m T \sqrt{(c + r_0^{2m})(d + r_0^{2m})} \right), \\ \mu_e = 2m(\mu_3 + \mu_1) / \mu_1 \mu_3.$$

Сталу  $C$  одержимо, підставивши знайдене значення функції  $\phi(\eta)$  (21) в умову (12):

$$C = \mu_e r_0^m T - \mu_e r_0^m T I_2 I_1^{-1} \sqrt{(c + r_0^{2m})(d + r_0^{2m})} + \\ + \pi^{-1} 2m\mu_e \varphi_1 T_1 \sqrt{(d - r_1^{2m})(r_1^{2m} - c)} r_1^m I_3 I_1^{-1}, \quad (22)$$

$$I_1 = 2d^{-0.5} K(k, \pi/2),$$

$$I_2 = 2\sqrt{d} (d + r_0^{2m})^{-1} \Pi(k, h, \pi/2),$$

$$I_3 = 2\sqrt{d} (d - r_1^{2m})^{-1} \Pi(k, h_1, \pi/2), k^2 = (d - c)/d,$$

$$h = (c - d) / (d + r_0^{2m}), h_1 = (d - c) / (d - r_1^{2m}).$$

Зазначимо, що за умови  $T_1 = 0$  (береги тріщини вільні від навантаження) розв'язок (22) збігається з побудованим у праці [20], а в разі, коли  $T = 0$  і  $\mu_2 = \mu_1$ , рівняння (20) збігається зі сингулярним інтегральним рівнянням праці [7] про навантажену зсувними зусиллями тріщину на бісектрисі однорідного клина.

З (20) випливає, що похідна від функції стрибка переміщень дорівнює:

$$f'_{w1}(r) = r^{m-1} \phi(r). \quad (23)$$

Згідно з властивістю перетворення Мелліна  $rf'(r) \bullet = -pf(p)$ . Відтак, підставивши трансформанту функції стрибка переміщень  $\tilde{f}_{w1}(p)$  у подання (10), а отриману в результаті цього трансформанту переміщень у (8), отримуємо подання напружень та переміщень у досліджуваній системі.

В околі точок сходження декількох матеріалів поля напружень та переміщень у разі антиплоскої деформації можна подати у вигляді [5; 6; 8]:

$$w(r, \varphi) = \frac{r \tilde{K}_3}{r^\lambda \sqrt{2\pi}} f_1(\varphi), \quad \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{\tilde{K}_3 f_2(\varphi)}{r^\lambda \sqrt{2\pi}}, \quad (24) \\ \sigma_{rz}(r, \varphi) = \frac{\tilde{K}_3 f_3(\varphi)}{r^\lambda \sqrt{2\pi}},$$

де  $\tilde{K}_3$  – сталий коефіцієнт, який характеризує спосіб та інтенсивність навантаження (за анало-

гією до [3; 8] називатимемо його узагальненим коефіцієнтом інтенсивності напружень клинової системи – УКІНКС);  $f_i(\varphi)$  – кутові функції біля максимального значення порядку сингулярності ( $i=1,2,3$ ), що характеризують кутову зміну розподілу переміщень та напружень залежно від полярної координати і не залежать від способу навантаження системи (їх вирази подані у [5; 8]);  $\lambda$  – максимальний порядок сингулярності.

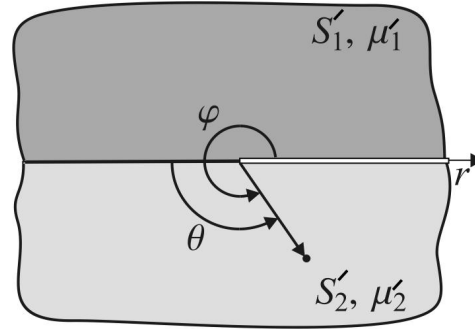


Fig. 3. Interfacial crack  
Рис. 3. Міжфазна тріщина

Грунтуючись на поданнях (24) та результатах праці [5; 8], можемо стверджувати, що в околі вістря міжфазної тріщини, розташованої на межі з'єднання півплощин  $S'_1$  та  $S'_2$  з модулями зсуву  $\mu'_1$  і  $\mu'_2$  відповідно (див. рис. 3) поля напружень та переміщень описують такі співвідношення:

$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = 0,5 \tilde{K}_3 (2\pi r)^{-0.5} \mu'(\varphi) \cdot \\ \cdot \left( (\mu'_2 - \mu'_1) (\mu'_2)^{-1} S_+(\varphi - \pi) - 1 \right) \sin 0,5\varphi, \\ w(r, \varphi) = 0,5 \sqrt{2r\pi^{-1}} \tilde{K}_3 \left( 1 - (\mu'_2 - \mu'_1) (\mu'_2)^{-1} S_+(\varphi - \pi) \right) \cdot \\ \cdot \cos 0,5\varphi, \\ \sigma_{rz}(r, \varphi) = 0,5 \tilde{K}_3 (2\pi r)^{-0.5} \mu(\varphi) \cdot \\ \cdot \left( 1 - (\mu'_2 - \mu'_1) (\mu'_2)^{-1} S_+(\varphi - \pi) \right) \cos 0,5\varphi, \quad (25) \\ \mu'(\varphi) = \mu'_1 + (\mu'_2 - \mu'_1) (\mu'_2)^{-1} S_+(\varphi - \pi).$$

При цьому на підставі міркувань, аналогічних до здійснених для класичних узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) в праці [3], з'ясовано що узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень клинової системи (УКІНКС) можна обчислювати за формулою

$$\tilde{K}_3 = -\lim_{r \rightarrow 0} \mu'_2 (\mu'_1 + \mu'_2)^{-1} 2\sqrt{2\pi r} f'_w(r), \quad (26)$$

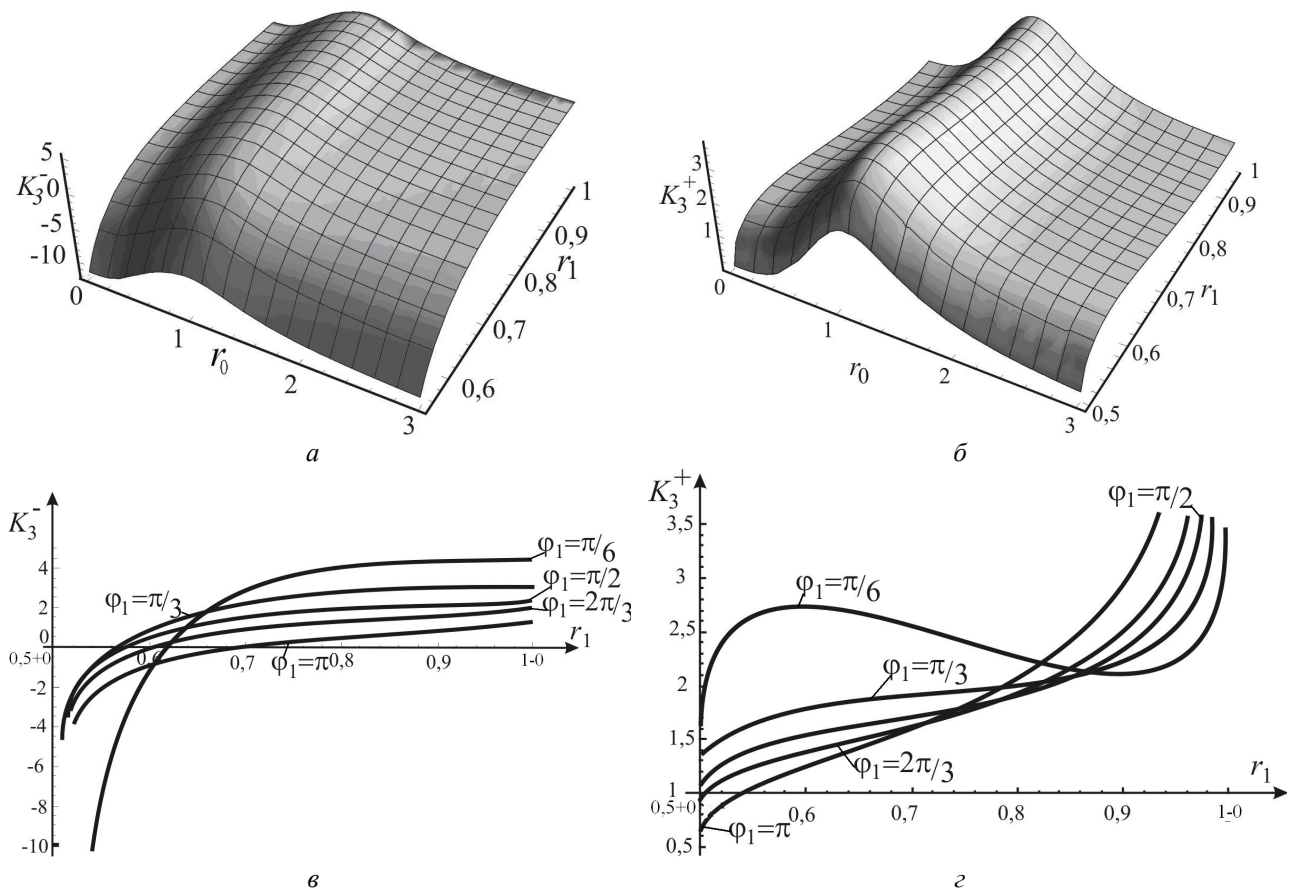
де  $f'_w(r)$  – похідна від функції стрибка переміщень.

Тоді напруження та переміщення поблизу кінців скінченної міжфазної тріщини описуватимуться поданнями (25), де  $\mu'_1 = \mu_1$ ,  $\mu'_2 = \mu_2$ , а УКІНКС  $\tilde{K}_3$  залежно від вістря тріщини обчислюється за формулою

$$\tilde{K}_3^\pm = \mp \lim_{r \rightarrow l^\mp} \frac{\mu_2 2\sqrt{2\pi|r-l^\mp|} f'_w(r)}{\mu_2 + \mu_1}, \quad l^- = a_1, \quad l^+ = b_1. \quad (27)$$

На підставі формул (21), (22) і (27) досліджено УКІНКС поблизу кінців тріщини, розташованої на лінії з'єднання двох клинів з однаковими кутами розхилу. На рис. 4, а, б зображено залежність зміни УКІНКС від точок прикладання оди-

ничних зосереджених сил на берегах клинової системи  $(0; r_0)$ ,  $(\varphi_3; r_0)$  та на краях тріщини  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$  (див. рис. 4, а, б). На рис. 4, в, г відображена залежність значення УКІНКС від точки прикладання одиничної зосередженої сили на краях тріщини  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$  за відсутності зосередженої сили на берегах клинової системи (різні лінії на рис. 4, в, г відповідають різним кутам розхилу клинів). Обчислення здійснені за таких геометричних та механічних параметрів системи:  $a_1 = 0,5$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\mu_3/\mu_1 = 10$ ,  $\varphi_1 = \pi/6$ ,  $\varphi_3 = 2\varphi_1$ .



**Рис. 4.** Значення узагальненого коефіцієнта інтенсивності напружень клинової системи залежно від точок прикладання зосереджених сил та геометричних параметрів системи:

а, б – залежно від точок прикладання одиничних зосереджених сил на берегах клинової системи  $(0; r_0)$ ,  $(\varphi_3; r_0)$  та на краях тріщини  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$ ; в, г – залежно від точки прикладання одиничної зосередженої сили тільки на краях тріщини  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$

**Fig. 4.** The value of the generalized factor of stress intensity depending on the point of application of the forces of points and geometric parameters of the wedge system:

а, б – depending on the points of application of the unit concentrated forces at the wedge system edges  $(0; r_0)$ ,  $(\varphi_3; r_0)$ , and at the edges of the crack  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$ ; в, г – depending on the point of application of a unit concentrated force at the edges of the crack only  $(\varphi_1 - 0; r_1)$ ,  $(\varphi_1 + 0; r_1)$



### Висновки

Виявлено, що прикладена до берегів клинної системи сила найбільше впливатиме на значення УКІНКС, якщо проєкція точки її дії на лінію спаю потрапляє в зайняту тріщиною область. У разі, якщо відстань від вістря системи до точки прикладання зосередженої сили на берегах системи перевищує  $3b_1$ , вплив цієї сили на значення УКІНКС неістотний (див. рис. 4, а, б).

Чим менший кут розхилу елементів системи, тим швидше зростає модуль УКІНКС біля лівого кінця тріщини в разі наближення точки прикладання зосередженої сили на берегах тріщини до її лівого кінця ( $r \rightarrow a + 0$ ) і тим більшим стає значення УКІНКС, якщо сила прикладена до правого кінця тріщини ( $r = b - 0$ ). Можна виявити таку точку прикладання зосередженої сили, що УКІНКС у лівому вістрі тріщини дорівнюватиме нулю (див. рис. 4, в).

В околі правого кінця тріщини чітко простежується зворотна картина: чим менший кут, тим повільніше зростає модуль УКІНКС з наближенням точки прикладання зосередженої сили до правого кінця тріщини та тим менше значення УКІНКС, коли сила прикладена в лівому кінці тріщини (див. рис. 4, г). Цікавим є те, що при значеннях кута розхилу клинів системи, менших за  $\pi/3$ , модуль УКІНКС спершу з наближенням точки прикладання зосередженої сили до правого кінця тріщини зростає, потім дещо спадає і знову зростає, сягаючи свого максимуму (див. рис. 4, г).

Виявлено, що УКІНКС поблизу кінців скінченної міжфазної тріщини не залежить від відношення модулів зсуву компонентів системи, а характеризується лише геометричними параметрами клинної системи та її навантаженням. Це впливає також з аналізу виразів (27) і (23).

На конкретному прикладі двоклинної системи продемонстровано методику побудови розв'язку задачі визначення напружено-деформованого стану багатоклинного композиту з радіальними дефектами. Вказано спосіб обчислення невідомих коефіцієнтів, що фігурують в асимптотичних поданнях напружень та переміщень поблизу кінців міжфазної тріщини. У випадку тріщини на лінії зчеплення двох клинів з однаковими кутами розхилу з'ясовано аналітичне значення УКІНКС та досліджено вплив на них параметрів системи.

Розроблена математична модель може бути успішно використана для прогнозування надійності вузлів машин і механізмів, частини яких мають композитну будову чи містять різного роду

концентратори напружень, зокрема при дослідженні міцності зубчастих коліс, вінець і осердя яких виготовляються з двох різних матеріалів, а також при прогнозуванні надійності після усунення тріщин різними способами.

### Бібліографічний список

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. Москва: Наука, 1969. Т. 1. 344 с.
2. Боджи Д. Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных по граням упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. *Тр. АОИМ. Сер. Прикладная механика*. 1971. Т. 38, № 2. С. 87–96.
3. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Элементы теории пластичности та міцності. Львів: Світ, 1999. I–II. 944 с.
4. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонки з дефектами. Львів: СПОЛОМ, 2003. 318 с.
5. Махоркін М., Сулим Г. Асимптотики і поля напружень у клинній системі за умов антиплоскої деформації. *Машинознавство*. 2007. № 1. С. 8–13.
6. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие / под общ. ред. В. В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2. 620 с.
7. Саврук М. П. Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2002. № 5. С. 57–65.
8. Сулим Г. Т., Махоркін М. І. Антиплоска деформація клинної системи з тонкими радіальними неоднорідностями. *Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень*. Механіка: зб. наук. праць. Київ: Наук. думка, 2007. С. 295–304.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Москва: Наука, 1963. 368 с.
10. Carpinteri A., Paggi M. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials. *Int. J. Fract.* 2005. Vol. 135, No. 4. P. 267–283.
11. Carpinteri A., Paggi M. Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2011. Vol. 6, issue 1-4. P. 113–125.
12. Jiménez-Alfaro S., Villalba V., Mantič V. Singular elastic solutions in corners with spring boundary conditions under anti-plane shear. *International Journal of Fracture*. 2020. 223(1-2). P. 197–220. doi: 10.1007/s10704-020-00443-5.
13. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Numerical methods and models for anti-plane strain of a system with a thin elastic wedge. *Archive of Applied Mechanics*. 2008. Vol. 78, No. 10. P. 821–831.
14. Makhorkin M., Makhorkina T. Analytical determination of the order of stress field singularity in some

configurations of multiwedge systems for the case of antiplane deformation. *Econtechmod. An international quarterly journal*. 2017. Vol. 6, No. 3. P. 45–52.

15. Makhorkin M. I., Skrypochka T. A., Tor-skyy A. R. The stress singularity order in a composite wedge of functionally graded materials under antiplane deformation. *Mathematical modeling and computing*. 2020. Vol. 7, No. 1. P. 39–47. doi: 10.23939/mmc2020.01.039.

16. Makhorkin M., Sulym H. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation. *Civil and environmental engineering reports*. 2010. No. 5. P. 235–251.

17. Pageau S. S., Josef P. F., Bigger S. B. The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions. *Int. J. Solids Struct.* 1994. Vol. 31, No. 21. P. 2979–2997.

18. Picu C. R., Gupta V. Stress singularities at triple junctions with freely sliding grains. *Int. J. Solids Struct.* 1996. Vol. 33, No. 11. P. 1535–1541.

19. Savruk M., Kazberuk A. Stress concentration at notches. *Springer International Publishing*. AG, 2016.

20. Shahani A. R. Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bonded materials. *Arch. Appl. Mech. (Ing. Ar.)*. 2006. Vol. 75, No. 6–7. P. 405–411.

21. Shahani A. R., Adibnazari S. Analysis of perfectly bonded wedges and bonded wedges with an interfacial crack under antiplane shear loading. *Int. J. Solids Struct.* 2000. Vol. 37, No. 19. P. 2639–2650.

22. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. *Z. Math. Phys.* 1907. Vol. 55. P. 60–103.

*Стаття надійшла 30.11.2020*