

## АНАЛІЗ МЕТОДІВ ТА ЗАСОБІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРОЦЕСІВ У ДОВГИХ ЛІНІЯХ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧ

Віталій Левонюк, к. т. н.

*Львівський національний аграрний університет  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н,  
Львівська обл., Україна,  
e-mail: vitaliy\_levoniuk@ukr.net*

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2020.24.101>

### **Левонюк В. Р. Аналіз методів та засобів дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач**

У праці здійснено аналіз наукових публікацій, які стосуються дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач. Аналіз показав, що на сьогодні не існує єдиного прийнятих підходів до дослідження згаданих процесів, натомість існує велика кількість методів і засобів для їх відтворення. Обґрунтовано перевагу польових підходів над коловими під час математичного моделювання згаданих процесів. Наведено можливі способи отримання диференціальних рівнянь довгої лінії, зокрема на основі теорії електромагнітного поля та на основі варіаційних підходів, з використанням модифікованого принципу Гамільтона – Остроградського.

Здійснено аналіз методів і засобів розв'язування диференціальних рівнянь довгої лінії електропередачі та наведено узагальнені розв'язки цих рівнянь у вигляді математичних формул за методами: Д'Аламбера, Фур'є, Коші, перетворень Лапласа, інтегральних перетворень Фур'є та за допомогою методів дискретизації диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розглянуто праці, в яких досліджувалися перехідні електромагнітні процеси у довгих лініях електропередач практично кожним із перерахованих методів. Також розглянуто й інші, менш уживані підходи, зокрема: діакопичний, спектральний (частотний), «блукуючих хвиль», а також проаналізовано існуючі програмні засоби для аналізу згаданих процесів. Аналіз показав, що сьогодні більшість досліджень перехідних електромагнітних процесів здійснюється з використанням готових комп'ютерних програм, які призначені для інженерних розрахунків, а не наукових. Розкрито основні проблеми під час створення нових та покращання існуючих програмних комплексів для аналізу перехідних електромагнітних процесів. Вказано перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** перехідні електромагнітні процеси, довга лінія, методи розв'язування рівнянь, диференціальні рівняння лінії, телеграфні рівняння, математична модель.

### **Levoniuk V. Analysis of the methods and means to investigation transient electromagnetic processes in long power lines**

The paper analyzes scientific publications related to the study of transient electromagnetic processes in long power lines. The analysis has shown that there are currently no common approaches to the study of these processes, but instead there are a large number of methods and means for their reproduction. The advantage of field approaches over wheeled ones in the mathematical modeling of the mentioned processes is substantiated. Possible ways to obtain differential equations of a long line are presented, in particular on the basis electromagnetic field theory and variable approaches, using the modified Hamilton – Ostrogradsky principle.

The work supplies analysis of the methods and means of solving the differential equations of a long power line and generalizes solutions of those equations in the form of mathematical formulas by the following methods: D'Alembert, Fourier, Cauchy, Laplace transform, Fourier transforms, as well as methods of discretization partial differential equations. The paper deals with the study of transient electromagnetic processes in long power lines by almost each of those methods. The others, less used approaches, are also considered, in particular: diakoptic, spectral (frequency), «wandering waves» as well as existing software for analyzing the mentioned processes. The analysis shows that nowadays, the majority of studies of transient electromagnetic processes are carried out using ready-made computer programs that are designed for engineering calculations rather than scientific ones. The main problems concerning creating new and improving the existing software systems for the analysis of transient electromagnetic processes are revealed. The prospects for further research are indicated.

**Key words:** transient electromagnetic processes, long power line, equation solving methods, differential line equations, telegraph equations, mathematical model.

**Постановка проблеми.** Вплив перехідних електромагнітних процесів на електротехнічне обладнання та режими його роботи відомий широкому загалу фахівців з електроенергетики та якості

електричної енергії вже давно. Відомо [1], що без належного врахування перехідних електромагнітних процесів годі здійснити якісне проектування електричних мереж, налагодження нор-

мальної роботи релейного захисту й автоматики електричних мереж тощо. Особливо відчутними ці перехідні процеси є в лініях електропередач класу надвисокої напруги, оскільки довжина цих ліній співмірна зі сотнями кілометрів, а тому у лінії протікають хвильові процеси, які зі свого боку суттєво впливають на загальну фізичну картину перехідних процесів у лінії [2].

Значна довжина лінії електропередачі, чимала ємність та недосконалість ізоляції між проводами та землею і між самими проводами в лінії призводять до виникнення зміщення та витоку струмів. Тому в таких лініях струми й напруги є не лише функціями часу, а й відстані. Аналізуючи перехідні процеси у таких лініях, їх розглядають як електричні контури з розподіленими параметрами (погонні параметри лінії), які є функціями напруги та струму.

Аналіз перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач з урахуванням нелінійних параметрів ліній не входить у коло наших наукових інтересів, тому ми не враховуватимемо залежність цих параметрів від функцій струму та напруги. Такий підхід, звичайно, не буде з повною адекватністю відображати перехідні процеси у лінії, проте дасть змогу спростити задачу і не призведе до суттєвих похибок.

На сьогодні одним із найпопулярніших способів здійснення аналізу перехідних електромагнітних процесів у лініях електропередач є застосування апарату математичного моделювання. У світі постійно виникають нові теорії математичного моделювання та отримують подальший розвиток існуючі. Це й не дивно, адже застосування апарату математичного моделювання дає змогу уникнути використання коштовних натурних експериментів, а в період світової діджиталізації та масового використання комп'ютерів у всіх галузях науки і техніки легко створювати програмні засоби різноманітними мовами програмування на основі розроблених моделей. Ці програмні засоби дають змогу евентуальному досліднику чи інженеру аналізувати перехідні процеси в лініях електропередач за допомогою персонального комп'ютера та постійно вдосконалювати наявні засоби аналізу, що є ще однією актуальною задачею в галузі електроенергетики, а саме покращання *Smart Grid* технологій.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

Аналіз літератури показав, що дослідженням перехідних електромагнітних процесів займається багато вітчизняних та світових науковців. Також варто зазначити, що в деяких працях уже було

здійснено аналіз методів та засобів для дослідження згаданих процесів у довгих лініях. Однак методи і засоби розглядали не сумісно, а окремо, що є не зовсім правильним, адже на основі методів зазвичай здійснюється розробка засобів для проведення досліджень. Тому ми вважаємо, що необхідно здійснити аналіз методів та засобів для дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач, враховуючи те, що вони між собою тісно пов'язані, а заодно детермінувати їхні вади та переваги.

Так, у праці [3] розв'язано актуальну наукову задачу, спрямовану на розвиток теорії багатополосників у керунку врахування міжфазних зв'язків в електричних контурах із розподіленими параметрами для покращання методів розрахунку усталених та перехідних процесів у трифазних електричних контурах з розподіленими параметрами та міжфазними зв'язками, які представлено багатополосними елементами. Тут було також представлено аналіз методів дослідження перехідних процесів, але лише з погляду методології, і аж ніяк не згадано про засоби дослідження.

Роботу [4] присвячено розробці методики аналізу електричних контурів із нелінійними розподіленими параметрами. У роботі одержано нові математичні формули для розрахунку електромагнітних процесів у контурах із лінійно залежними від струму опорамі, квадратичною залежністю від напруги провідностей, слабонелінійних індуктивних і ємнісних елементів. Наведено методику та аналітичні вирази для аналізу перехідних та енергетичних процесів у довгих лініях з малими втратами і нелінійними елементами. Розглянуто та проаналізовано способи розв'язання диференціальних рівнянь довгої лінії (телеграфних рівнянь). Варто відзначити, що автор праці схильний до використання польових моделей для дослідження перехідних процесів у довгих лініях електропередач.

У дисертації [5] розроблено ряд алгоритмів для дослідження перехідних електромагнітних процесів у складних регульованих електроенергетичних системах. Водночас тут здійснено аналіз програмних засобів для дослідження перехідних процесів в елементах електроенергетичних систем.

Також існує маса праць, наприклад [6 – 8], у яких дослідження перехідних процесів здійснюють лише із застосуванням готових програмних засобів, таких як *Matlab/Simulink*, *EMTP-RV* та ін.

Підсумовуючи аналіз літератури, бачимо, що на сьогодні не існує загальноприйнятих або конкретно виокремлених підходів до дослідження

перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач.

**Постановка завдання.** Враховуючи здійснений аналіз останніх досліджень та публікацій, метою нинішньої нашої праці є аналіз методів та засобів дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач та з'ясування їхніх вад і переваг.

**Виклад основного матеріалу.** Дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач можна здійснювати використовуючи підходи натурних експериментів або ж вдаватися до моделювання. Якщо взяти на озброєння перший спосіб, то дослідження згаданих процесів може потребувати значних матеріальних затрат, адже для здійснення експерименту з довгими лініями потрібна повноцінна установка, яка буде складатися з лінії електропередачі та іншого електротехнічного обладнання. Також можна здійснювати дослідження і на діючих лініях, але це, своєю чергою, є небезпечно, адже необхідно штучно створювати різноманітні аварійні режими, що може негативно вплинути на роботу мережі, в якій працює ця лінія. Тому на сьогодні при дослідженні перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач дослідники уникають застосування натурних експериментів.

Якщо моделювання згаданих процесів здійснювати на фізичних моделях, то це теж не є малозатратним способом, оскільки виникає необхідність виготовлення натурних моделей. Проте якщо як модельний інструмент використовувати апарат математики (апарат математичного моделювання), то дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач дешевшають у десятки разів. Саме тому математичне моделювання сьогодні займає чільне місце в дослідженні різноманітних процесів і режимів в електротехніці.

Якщо ми говоримо про математичне моделювання перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач, то тут зазвичай використовують два підходи: коловий та польовий. Перший полягає в тому, що аналіз перехідних процесів у довгих лініях електропередач здійснюється за допомогою еквівалентності рівняння довгої лінії (телеграфного рівняння) заступною коловою електричною схемою. Це означає, що з польового рівня опускаються на коловий, тобто з польової постановки задачі переходять на колову, зменшуючи тим, априорі, ступінь адекватності моделі

лінії, а відтак і ступінь адекватності моделі цілого досліджуваного об'єкта. Однак такий підхід користується величезним попитом завдяки своїй простоті. Якщо говорити про програмні засоби, які використовують таку методологію, то тут варто згадати програмні комплекси *RE* та *CircuitMaker*.

Так, у праці [9] розроблено математичну й цифрову моделі довгої лінії для дослідження комутаційних процесів з урахуванням їх основних параметрів, що забезпечує необхідну адекватність моделювання. Тут у програмному комплексі *RE* було змодельовано довгу лінію електропередачі та досліджено характеристики перехідних процесів у лінії при зміні кількості комірок модельованої лінії. Кожна комірка моделюється поздовжніми активним опором та індуктивністю і поперечними активною провідністю та ємністю.

Питання аналізу аварійних процесів в електричній мережі 750 кВ методами цифрового симулювання розглянуте в праці [10]. Тут у програмному комплексі *RE* на основі колових підходів розроблено математичні та цифрові моделі елементів електричної мережі 750 кВ, які адекватно відтворюють аварійні процеси. Наведено результати верифікації отриманих симуляцій з натурними осцилограмами.

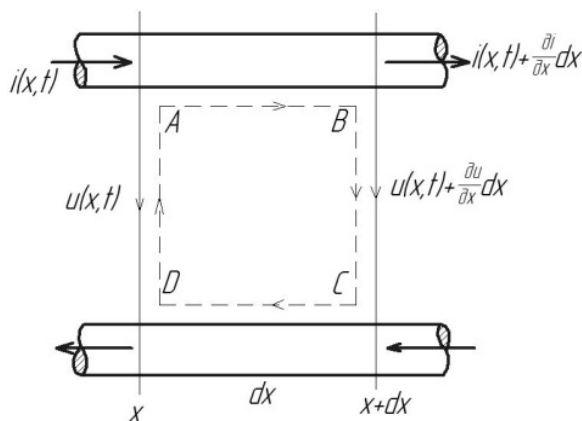
Не можна сказати, що застосування колових підходів буде неправильним, проте зрозуміло, що при цьому втрачається фізична суть самого рівняння довгої лінії.

Іншим підходом дослідження, який кардинально відрізняється від колового з погляду прикладної фізики, є польовий підхід. Польовий підхід ґрунтується на застосуванні теорії поля при отриманні диференціального рівняння довгої лінії.

Позначивши ємність, індуктивність, активний опір та активну провідність на одиницю довжини двопровідної лінії через  $C_0$ ,  $L_0$ ,  $R_0$ ,  $G_0$ , коротко наведемо отримання рівняння лінії на основі теорії електромагнітного поля. Значення  $C_0$  та  $L_0$  розраховуються на основі картини поля, яка ідентична статичному полю заряджених проводів, які несуть стаціонарні струми. Хоч у реальних лініях струм уздовж них змінюється, протягом малого відрізка лінії його можна вважати постійним [11].

Застосувавши до контуру, який зображений на рисунку, закон електромагнітної індукції Фарадея, отримаємо [11]:

$$\oint_L \mathbf{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} dA . \quad (1)$$



**Рис.** До застосування закону електромагнітної індукції [11]  
**Fig.** Before applying the law of electromagnetic induction [11]

Нехай напруга між точками  $A$  і  $D$  рівна  $u(x, t)$ , а між  $B$  і  $C$  –  $u(x, t) + (\partial u / \partial x) dx$ . Лінійний інтеграл напруженості електричного поля вздовж проводів рівний омичній напрузі, вираз (1) можна зобразити у такому вигляді [11]:

$$\oint_L \mathbf{E} ds = i \frac{R_0}{2} dx + u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + i \frac{R_0}{2} dx - u(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2)$$

Напруженість магнітного поля всередині контуру  $ABCD$  пропорційна струму, тому

$$\Phi = i L_0 dx. \quad (3)$$

Так, закон електромагнітної індукції можна записати [11]:

$$- \frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (4)$$

Крім того, на ділянці  $dx$  відбувається накопичування або зменшення заряду, що також збільшує різницю між вхідним та вихідним струмом. Відповідно цьому зміна заряду за одиницю часу на ділянці  $dx$  дорівнює [11]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial C_0 dx u(x, t)}{\partial t} = C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5)$$

звідки

$$- \frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6)$$

Одержані диференціальні рівняння довгої лінії першого порядку (4) та (6) можна пояснити на підставі схеми заміщення довгої лінії з розподіленими параметрами [12].

Диференціюючи рівняння (4) по  $x$ , отримаємо:

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial i}{\partial x} R_0 + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial i}{\partial t} R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (7)$$

Підставивши в рівняння (7) значення  $\partial i / \partial x$  із рівняння (6), знаходимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (C_0 R_0 + g_0 L_0) \frac{\partial u}{\partial t} + g_0 R_0 u. \quad (8)$$

У результаті отримуємо диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними, яке має лише одну змінну.

Рівняння (8) отримало назву диференціального рівняння довгої лінії другого порядку, а також воно відоме під назвою «телеграфне рівняння». З його допомогою можна досліджувати рух електромагнітних хвиль (хвильові процеси) у лініях електропередач.

Також відомі й інші способи одержання рівняння довгої лінії, наприклад, застосовуючи варіаційні підходи до побудови математичних моделей, зокрема міждисциплінарний (інтердисциплінарний) метод математичного моделювання, який ґрунтується на модифікації інтегрального варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського [13].

Ключовим елементом модифікованого принципу Гамільтона – Остроградського є розширений неконсервативний лагранжіан. Наведемо його аналітичний вигляд [13]:

$$L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*, \quad (9)$$

де  $L^*$  – модифікована функція Лагранжа,  $\tilde{T}^*$  – кінетична коенергія,  $P^*$  – потенціальна енергія,  $\Phi^*$  – енергія дисипації,  $D^*$  – енергія сторонніх непотенціальних сил.

Функціонал дії за Гамільтоном – Остроградським виглядає так [13]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( L^* + \int_l L_l dl \right) dt, \quad I = \int_l L_l dl,$$

тут  $L^* = 0,$  (10)

де  $S$  – дія за Гамільтоном – Остроградським,  $L_l$  – лінійна густина модифікованої функції Лагранжа,  $I$  – енергетичний функціонал.

Запишемо складники розширеної функції Лагранжа для системи Лехера [11] (мається на увазі лінійної густини) [13; 14]:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} \equiv T_l = \frac{L_0 Q_l^2}{2}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} \equiv P_l = \frac{1}{2C_0} Q_x^2, \quad Q_l \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} = i; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \equiv \Phi_l = \Phi_{l3} - \Phi_{lB} = \int_0^t \left( \frac{R_0}{2} Q_t^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right)_{l=\tau} d\tau, \quad (12)$$

де  $i(x, t)$  – струм у лінії,  $R_0, g_0, C_0, L_0$  – параметри лінії,  $\Phi_{l3}$  – зовнішня дисипація енергії,  $\Phi_{lB}$  – внутрішня дисипація енергії,  $Q(x, t)$  – заряд лінії.

Важливо відзначити, що в рівнянні (12) фігурує знак мінус! Це пов'язано з тим, що функція внутрішньої дисипації залежить від струмів

витоку, які протікають між проводами лінії. Очевидно, що лінія електропередачі під час пересилання енергії від джерела до споживача споживає енергію, що розсіюється в просторі. Іншими словами, енергія передається тільки за допомогою електромагнітного поля, а проводи лінії лише вказують напрямок поширення електромагнітної хвилі [11].

З урахуванням рівнянь (11), (12) енергетичний функціонал виглядатиме так [13; 14]:

$$I = \int_l \left\{ \frac{L_0}{2} Q_t^2 - \frac{1}{2C_0} Q_x^2 + \int_0^l \left( \frac{R_0}{2} Q_t^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau \right\} dl. \quad (13)$$

Далі, прирівнявши варіацію внутрішнього функціонала (13) та застосовуючи правило інтегрування частинами, а також відому теорему Гаусса – Остроградського, отримаємо рівняння (8).

До найпопулярніших методів розв'язання рівнянь (4) та (6), що описують процеси в довгих лініях у системах із розподіленими параметрами, належать методи Д'Аламбера та «блукуючих хвиль», які справедливі за умови співвідношення параметрів  $rC = gL$ , а також для лінії без втрат, тобто  $r = g = 0$ . У цьому разі рівняння (4) та (6) мають такий вигляд [15]:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (14)$$

Розв'язком рівнянь (14) є функція [15]:

$$u(x,t) = \frac{f(x-vt) + f(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \varphi(z) dz, \quad (15)$$

де

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f(x) = u(x,t)|_{t=0},$$

$$\varphi(x) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0}. \quad (16)$$

Цей метод застосовують у програмному комплексі *MatLab/Simulink*. Він добре апробований і розрахований на розв'язання широкого кола технічних задач, у тому числі в галузі електроенергетики. *MatLab* увібрав у себе досвід розвитку та комп'ютерної реалізації числових методів розв'язання рівнянь, накопичених за останні десятиліття. У бібліотеці *SimPowerSystems* цієї програми наявна модель лінії з розподіленими параметрами. Опис роботи цієї моделі наведено у праці [16]. Тут лінію змодельовано без втрат, тобто диференціальними рівняннями (14), у яких відсутні доданки з погонним активним опором та активною провідністю. Такі спрощення рівнянь зумовлені використанням методу Д'Аламбера, адже наявність у рівняннях згаданих доданків

значно ускладнює їх розв'язання. Втрати в лінії враховують штучним введенням хвильового опору на початку та в кінці лінії.

Цей програмний комплекс широко використовується дослідниками. Зокрема, у праці [17] досліджено резонансні перенапруги на ультрагармоніках парної кратності у лініях електропередач 750 кВ. Для цього розроблено модель магістральної електропередачі надвисокої напруги та виконано дослідження для запобігання системним аваріям. У працях [18; 19] авторами здійснено дослідження перехідних процесів у фрагменті електричної мережі під час роботи автоматичного повторного ввімкнення.

Ще одним методом розв'язання рівнянь довгої лінії є метод розділення змінних (метод Фур'є). Розв'язок рівняння (4) довгої лінії за допомогою методу розділення змінних буде виглядати так [20]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \sin \frac{an\pi}{l} t + C_n \cos \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (17)$$

$$\text{де} \quad D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (18)$$

Аналіз літератури показав, що цей метод не набув широкого застосування під час дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач. У праці [21] показано, як можна застосовуючи метод розділення змінних ефективно розв'язувати крайову задачу. Тут розв'язування рівнянь довгої лінії здійснено в програмному комплексі *MatLab* з використанням цієї ж алгоритмічної мови програмування.

Для розв'язання рівнянь довгої лінії застосовують також метод Коші, який ґрунтується на інтегралі Фур'є з крайовими умовами [20]:

$$u(x,t)|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x). \quad (19)$$

Розв'язок рівняння (4) за методом Коші має вигляд [20]:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\tau} t} \left\{ f \left( x + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) + f \left( x - \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) + \sqrt{LC} \int_{x-\frac{t}{\sqrt{LC}}}^{x+\frac{t}{\sqrt{LC}}} f(x) \frac{\partial}{\partial t} I \left[ \sqrt{\frac{(gL-rC)^2}{4LC} \left( \frac{t^2}{LC} - (\alpha-x)^2 \right)} \right] d\alpha + \sqrt{LC} \int_{x-\frac{t}{\sqrt{LC}}}^{x+\frac{t}{\sqrt{LC}}} \left[ F(\alpha) + \frac{1}{\tau} f(\alpha) I \left[ \sqrt{\frac{(gL-rC)^2}{4LC} \left( \frac{t^2}{LC} - (\alpha-x)^2 \right)} \right] \right] d\alpha \right\}. \quad (20)$$

де  $I(\alpha) = I_0(j\alpha)$  – функція Бесселя нульового порядку.

Цей метод, як і попередній, не набув широкого застосування в програмних засобах. Проте в праці [6] його реалізовано в програмному комплексі *MatLab* та описано всі алгоритми.

У класичних літературних джерелах з теоретичної електротехніки часто зустрічається розв'язок рівнянь довгої лінії методом перетворень Лапласа, який зводить систему згаданих рівнянь до системи операторних рівнянь [11; 12]:

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (r + pL)I - Li(x, 0); \\ -\frac{dI}{dx} &= (g + pC)U - Cu(x, 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Цю систему рівнянь можна легко привести до звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для функції напруги таке рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= (r + pL)(g + pC)U + \\ &+ L\frac{di(x, 0)}{dx} - C(r + pL)u(x, 0). \end{aligned} \quad (22)$$

У роботі [7] на основі методу Лапласа запропоновано ефективний числовий зворотний алгоритм для аналізу перехідних процесів у трифазній лінії електропередачі з довільними розподілами напруги та струму в лінії. Для знаходження напруг та струмів по краях лінії використано методологію перетворення Лапласа з урахуванням початкових умов. Фазні напруги та струми одержують як раціональні функції їх частоти. Окрім цього, показано, як можна застосувати числове зворотне перетворення Лапласа для отримання розподілу електромагнітних хвиль у лінії.

Якщо говорити про аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь довгої лінії, то тут необхідно відзначити метод інтегральних перетворень Фур'є. Згідно з цим методом розв'язком рівняння (4) є формули [4]:

при  $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$

$$u(\xi, t) = \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \Phi(\tau) e^{\frac{1}{2}a(\tau-t)} sh \frac{\lambda}{2}(t-\tau) d\tau; \quad (23)$$

при  $\lambda^2 = a^2 - 4b < 0$

$$u(\xi, t) = \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \Phi(\tau) e^{\frac{1}{2}a(\tau-t)} \sin \frac{\lambda}{2}(t-\tau) d\tau; \quad (24)$$

при  $4b = a^2$

$$u(\xi, t) = \int_0^t \Phi(\tau) (t-\tau) e^{\frac{1}{2}a(\tau-t)} d\tau, \quad (25)$$

де  $a = \frac{rC + gL}{LC}$ ,  $b = \frac{\xi^2 + g^2}{LC}$ ,

$$\Phi(t) = -\frac{\xi}{LC} [u(R, t) \cos R\xi - u(0, t)].$$

Внаслідок того, що цей метод ґрунтується на аналітичній основі, сьогодні він практично не використовується, оскільки його дуже важко реалізувати у вигляді комп'ютерної програми.

Одним із дієвих способів розв'язання диференціальних рівнянь довгої лінії є їх дискретизація, яка дає змогу звести диференціальні рівняння з частинними похідними до звичайних диференціальних рівнянь. Такий підхід уможливується наближеною заміною похідних по одній із незалежних змінних відношенням скінченних приростів функції та аргумента. Зокрема, система диференціальних рівнянь (4), (6) може бути дискретизована за методом прямих і записана так [22]:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\Delta x}{C} (i_{j-1} - i_j - gu_j); \quad (26)$$

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{\Delta x}{L} (u_j - u_{j+1} - ri_j), \quad (27)$$

де  $j$  – номер дискретного вузла лінії.

Перепишемо рівняння (8) так [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= (C_0 L_0)^{-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (g_0 L_0 + \right. \\ &\left. + C_0 R_0) v - g_0 R_0 u \right), \frac{\partial u}{\partial t} = v. \end{aligned} \quad (28)$$

Дискретизуючи рівняння (28) за методом прямих, використовуючи центральну похідну, отримаємо [24]:

$$\begin{aligned} \frac{dv_j}{dt} &= (C_0 L_0)^{-1} \left( \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} - (g_0 L_0 + \right. \\ &\left. + C_0 R_0) v_j - g_0 R_0 u_j \right); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{du_j}{dt} = v_j. \quad (30)$$

Аналізуючи рівняння (26), (27) та (29), (30), бачимо, що для їх розв'язку необхідно мати невідомі напруги та струми на початку та в кінці лінії (крайові умови). У реальних задачах електроенергетики ці напруги та струми є невідомими функціями, особливо, коли лінія має складну конфігурацію з'єднання з іншими елементами електричної мережі. У праці [25] нами було запропоновано використовувати для розв'язання рівняння довгої лінії (28) крайові умови другого та третього родів (крайові умови Неймана та Пуанкаре), зокрема рівняння, яке можна отримати за другим законом Кірхгофа для електричних контурів із розподіленими параметрами (4). Сьогодні цей метод використовується у вигляді програмних кодів, які написано алгоритмічними мовами програмування дослідниками самостійно.

Ще одним програмним комплексом, який використовується для аналізу перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач, є *PSCAD*. Для розв'язання рівнянь довгої лінії програмний комплекс використовує метод «блукуючих хвиль». Ми не будемо наводити математичне формулювання розв'язків з методом «блукуючих хвиль», оскільки вони подібні до методу Д'Аламбера.

Ефективність цього методу відображено у праці [8]. Тут у програмному комплексі *PSCAD* створено модель трифазної лінії електропередачі з розподіленими параметрами. Згадану модель можна використовувати для моделювання перехідних процесів при комутаціях, коротких замиканнях та інших режимах роботи лінії. Моделювання різноманітних режимів здійснюється додатковим залученням  $R, L, C$  елементів.

Моделювання перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач здійснюють також із використанням програмного комплексу *EMTP-RV*. В інструкції до цього програмного комплексу при описі лінії з розподіленими параметрами наявне посилання на працю [26], яка перебуває в закритому доступі. В анотації до цієї праці зазначено, що це є окрема універсальна комп'ютерна модель для аналізу перехідних електромагнітних та усталених процесів у лініях електропередач. Цей програмний комплекс користується значним попитом у вітчизняних та зарубіжних науковців.

Крім наведених вище підходів до моделювання перехідних процесів у довгих лініях, існує ще й так званий частотний (спектральний) метод. У праці [27] при розрахунку перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях, викликаних проходженням імпульсів напруги та струму, у моделі використано частотний метод. Тут спектральну функцію визначено прямим перетворенням Фур'є, а функцію часу – зворотним.

Одним із відносно нових підходів до аналізу перехідних процесів є діакоптический підхід. Так, у праці [28] розглянуто проблему розрахунку перехідних процесів у складних електричних контурах, які містять елементи різної фізичної природи, з використанням діакоптического підходу. Тут кожен фрагмент контуру зображено у вигляді підсхеми, яку описано відповідною математичною моделлю. Змодельовано перехідний процес методом роздільного інтегрування з урахуванням зв'язку між підсхемами на кожному часовому інтервалі. Наведено приклади розрахунку лінійних та нелінійних контурів із довгими лініями.

Завершуючи аналіз методів та засобів дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач, варто зазначити, що для цього існують ще й інші, менш популярні програмні комплекси, наприклад: *EUROSTAG*, *PSS/NETOMAC*, *SIMPOW*, *АНАРЕС*, *МУСТАНГ*, *RUStab*. Однак ці програмні комплекси не набули широкого застосування в наукових колах фахівців-електроенергетиків і виступають лише як інженерний інструмент.

### Висновки

1. Здійснений аналіз методів та засобів для дослідження перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач дав змогу зробити чітке розмежування наукових та інженерних підходів до дослідження згаданих процесів. Також аналіз показав, що для розв'язання рівнянь довгої лінії дослідники в основному використовують готові програмні комплекси, наприклад *Matlab/Simulink*, *EMTP-RV* та ін.

2. Існуючі програмні комплекси використовують переважно колові підходи до моделювання перехідних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач, що дещо зменшує ступінь адекватності отриманих результатів.

3. Встановлено недоліки існуючих аналітичних методів, їх практичної реалізації за допомогою алгоритмічних мов програмування, а також труднощі в разі необхідності врахування впливу на перехідний процес нелінійностей розподілених параметрів довгих ліній.

4. Отримані результати аналізу методів та засобів для дослідження перехідних процесів у довгих лініях електропередач будуть використані в подальших наших дослідженнях, які стосуватимуться перехідних комутаційних електромагнітних процесів у довгих лініях електропередач надвисокої напруги.

### Бібліографічний список

1. Буслова Н. В., Винославский В. Н., Денисенко Г. Н., Перхач В. С. Электрические системы и сети. Киев: Вища шк., 1986. 584 с.
2. Веников В. А. Электрические системы. Передача энергии переменным и постоянным током высокого напряжения. Москва: Высш. шк., 1972. 368 с.
3. Лобозинський В. Ю. Перехідні процеси в представлених багатополосниками трифазних колах із розподіленими параметрами та електромагнітними зв'язками: дис. ... канд. техн. наук. Київ, 2019. 190 с.
4. Новікова О. І. Аналіз електричних кіл з розподіленими параметрами при малих нелінійностях елементів: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Київ, 1998. 20 с.

5. Фомина Т. Ю. Разработка алгоритма расчета переходных процессов сложных регулируемых ЭЭС: дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2014. 109 с.
6. Delkhosh M. A Method for Solving the Special Type of Cauchy-Euler Differential Equations and its Algorithms in MATLAB. *Delkhosh JOS*. 2012. Vol. 2, No. 3. P. 131–135.
7. Jung-Chien Li. Transient analysis of three-phase transmission lines with initial voltage and current distributions. *Electric Power Systems Research*. 1995. Vol. 35, issue 3. P. 177–186.
8. Smolarczyk A., Chmielak W. Program PSCAD/EMTDC jako wygodne narzędzie do modelowania linii napowietrznych. *Prace instytutu elektrotechniki*. 2016. № 272. S. 31–48.
9. Равлик О. М., Стецик В. Я. Моделювання комутаційних процесів ліній надвисокої напруги 750 кВ. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи*. 2016. № 840. С. 102–106.
10. Лисяк Г. М., Равлик О. М., Сегеда М. С. Аналіз аварійних процесів в електричній мережі 750 кВ. *Технічна електродинаміка*. 2003. № 1. С. 49–52.
11. Шимони К. Теоретическая электротехника. Москва: Мир, 1964. 785 с.
12. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Москва: Высш. шк., 1973. 658 с.
13. Чабан А. В. Принцип Гамільтона – Остроградського в електромеханічних системах. Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2015. 488 с.
14. Чабан А. В., Левонюк В. Р., Дробот І. М., Герман А. Ф. Математичне моделювання перехідних процесів у лінії Лехера в стані неробочого ходу. *Електротехніка і електромеханіка*. 2016. № 3. С. 30–35.
15. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики. Львів: Вид-во при Львів. держ. ун-ті вид. об'єднання «Вища школа», 1989. 464 с.
16. Dommel H. W. Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single- and Multiphase Networks. *IEEE Transactions On Power Apparatus And Systems*. 1969. P. 388–399.
17. Кузнецов В. Г., Тугай Ю. І., Шпорлянський О. Г., Кучанський В. В. Дослідження резонансних перенапруг на ультрагармоніках парної кратності на ЛЕП 750 кВ. *Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України*. 2011. Вип 29. С. 122–127.
18. Vinesh Gamit, Vivek Karode, Karan Mistry, Pankaj Parmar, Ashish Chaudhari. Fault analysis on three phase system by auto reclosing mechanism. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2005. Vol. 04, issue 05. P. 292–298.
19. Сизганов Н. В., Сизганова Е. Ю., Петухов Р. А., Шевченко В. В. Моделирование электропередачи Алтай – Итатская для исследования режимов трехфазного автоматического повторного включения. *ВЕСТНИК ИргТУ*. 2016. № 2 (109). С. 86–93.
20. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Москва: Наука, 1967. 780 с.
21. Su´arez P. U. An introduction to the Split Step Fourier Method using MATLAB. 2013. P. 1–14. URL: [https://www.researchgate.net/profile/Pablo\\_Suarez5/publication/281441538\\_An\\_introduction\\_to\\_the\\_Split\\_Step\\_Fourier\\_Method\\_using\\_MATLAB/links/55e71b8f08aeb6516262d8aa/An-introduction-to-the-Split-Step-Fourier-Method-using-MATLAB.pdf?origin=publication\\_detail](https://www.researchgate.net/profile/Pablo_Suarez5/publication/281441538_An_introduction_to_the_Split_Step_Fourier_Method_using_MATLAB/links/55e71b8f08aeb6516262d8aa/An-introduction-to-the-Split-Step-Fourier-Method-using-MATLAB.pdf?origin=publication_detail) (Last accessed: 06.04.2020).
22. Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник. Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. 608 с.
23. Czaban A., Lis M., Sosnowski J., Lewoniuk W. Model matematyczny dwuprzewojowej linii zasilania z wykorzystaniem modyfikowanej zasady Hamiltona. *Maszyny Elektryczne – Zeszyty Problemowe*. 2016. Nr 1. S. 31–36.
24. Czaban A., Lis M., Chrzan M., Szafranec A., Levoniuk V. Mathematical modelling of transient processes in power supply grid with distributed parameters. *Przegląd elektrotechniczny*. 2018. Nr 1. P. 17–20.
25. Левонюк В. Р. Методи та засоби аналізу комутаційних перехідних процесів у лініях електропередачі надвисокої напруги на основі варіаційних підходів: дис. ... канд. техн. наук. Львів, 2019. 209 с.
26. Hesse M. H. Electromagnetic and electrostatic transmission-line parameters by digital computer. *IEEE Trans. Power App. Syst.* 1963. Vol. 82. P. 282–290.
27. Нестеров Р. Е., Канев Ф. Ю., Макенова Н. А. Математическое моделирование линий электропередач и систем заземления. *Современные проблемы науки и образования*. 2015. № 1. URL: <https://www.science-education.ru/pdf/2015/1/1680.pdf> (дата обращения: 06.04.2020).
28. Стахів П., Рендзіняк С., Коруд А. Застосування діакоптического підходу до розрахунку перехідних процесів у складних електричних колах з довгими лініями. *Теоретична електротехніка*. 2005. Вип. 58. С. 39–43.

Стаття надійшла 16.06.2020