УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВ НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ

Тарас Бубняк, к. ф.-м. н., Віктор Семерак, к. т. н., Олексій Бурнаєв, к. ф.-м. н., Олександр Пономаренко, к. ф.-м. н., Лариса Шпак, к. ф.-м. н., Оксана Говда

Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: semerakviktor@gmail.com

https://doi.org/10.31734/agroengineering2024.28.125

Бубняк Т., Семерак В., Бурнаєв О., Пономаренко О., Шпак Л., Говда О. Напружений стан трансверсально-ізотропного середовища зі сфероїдальним включенням за умов неідеального контакту

Просторові задачі теорії пружності і термопружності є важливою частиною сучасної механіки деформівного твердого тіла. Їх актуальність визначається численним застосуванням цієї науки для вирішення важливих технічних і технологічних проблем у різних галузях виробництва. Необхідність таких досліджень зумовлена, передусім, знанням міцності матеріалів і елементів конструкцій. Як правило, екстремальні напруження досягаються в зонах розділу фаз, оскільки практично всі конструктивні матеріали неоднорідні за своєю структурою.

Важливою є проблема моделювання властивостей міжфазної межі з урахуванням реальних особливостей її структури. Отримання достовірної і повної інформації про розподіл напружень в елементах конструкцій пов’язане з використанням ефективних аналітичних і числових методів розв’язування просторових задач теорії пружності.

У просторових задачах теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропних тіл розв’язок представляється через потенціальні функції, які є гармонічними у спеціально вибраних системах координат. Це суттєво зменшує математичні труднощі, які виникають під час розв’язування конкретних крайових задач.

Останніми роками з’явились публікації як вітчизняних, так і зарубіжних вчених, в яких розглядаються задачі теорії пружності і термопружності для ізотропного середовища в умовах неідеального механічного і теплового контактів. Зокрема, у працях А. Т. Улітка, Ю. М. Неміша, Н. Е. Качаловської та ін. розглядаються осесиметричні задачі. Однак для трансверсально-ізотропного тіла з включеннями канонічної форми розв’язки таких задач майже відсутні. На відміну від проаналізованих задач для ідеального контакту, розв’язок останніх отримується не в замкнутому вигляді, а зводиться до розв’язування нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Важливі результати в цьому напрямі отримані в роботах Я. С. Підстригача, Ю. М. Подільчука, побудовані точні розв’язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

Наведено постановку задачі теорії пружності про розподіл нормальних, меридіальних і кругових напружень трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне включення у формі стиснутого сфероїда при рівномірному всесторонньому стиску, залежно від геометрії включення.

На основі отриманих розв’язків просторових задач теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропного середовища зі стиснутим сфероїдальним включенням в умовах неідеального механічного і теплового контактів досліджено розподіл термонапружень як у середовищі, так і у включенні за дії довільного лінійного температурного і силового полів. Отримано інженерні формули для розрахунку концентрації напружень у середовищі та включенні за різних механічних навантажень – стиску, розтягу, зсуву, згину та кручення.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

Bubniak T., Semerak V., Burnaiev O., Ponomarenko O., Shpak L., Hovda O. Stress state of a transversally isotropic medium with a spheroidal inclusion under imperfect contact conditions

Spatial problems related to the theory of elasticity and thermoelasticity play a significant role in the modern mechanics of deformable solids. Their importance arises from the numerous applications of this field in addressing critical technical and technological challenges across various industries. Research in this area is primarily driven by the need to understand the strength of materials and structural components. Typically, extreme stresses occur at the phase interface zones, as nearly all structural materials exhibit heterogeneity in their composition.

Modeling the properties of interphase boundaries while considering their actual structural features is a crucial task. To obtain reliable and comprehensive information about stress distribution in structural elements, effective analytical and numerical methods must be employed to tackle spatial problems within the theory of elasticity.

In spatial problems pertaining to the theory of elasticity and thermoelasticity for transversely isotropic bodies, solutions are expressed through potential functions that are harmonic in specifically chosen coordinate systems. This approach significantly alleviates the mathematical challenges typically encountered when solving particular boundary value problems.

Recent publications from both domestic and international researchers have addressed issues related to the theory of elasticity and thermoelasticity for isotropic materials, particularly under conditions of imperfect mechanical and thermal contact. For instance, the works of A. T. Ulitko, Yu. M. Nemish, and N. E. Kachalovska explore axiometric problems. However, there are limited solutions available for transversely isotropic bodies with inclusions of canonical forms. Unlike the analyzed problems involving perfect contact, the latter cannot be solved in a closed form but instead requires the resolution of infinite systems of linear algebraic equations.

Notable advancements in this field have been achieved by researchers such as Ya. S. Pidstryhach and Yu. M. Podilchuk, who have constructed exact solutions for spatial problems related to elasticity and static thermoelasticity across various coordinate systems, including spherical, cylindrical, spheroidal, and parabolic configurations.

The current study addresses the distribution of normal, meridional, and circular stresses in a transversely isotropic medium that contains an anisotropic inclusion shaped like a compressed spheroid, subjected to uniform all-around compression. This analysis depends on the geometry of the inclusion.

Building on the solutions derived from spatial problems of elasticity and thermoelasticity involving a transversely isotropic medium with a compressed spheroidal inclusion, investigations were conducted into the thermal stress distribution within both the medium and the inclusion. This was done under the influence of arbitrary linear temperature and force fields. Engineering formulas were developed to calculate stress concentrations in both the surrounding medium and the inclusion under various mechanical loads, including compression, tension, shear, bending, and torsion.

Keywords: potential functions, transversally isotropic medium, imperfect contact, spheroid, stress and thermal stress fields.

Постановка проблеми. Просторові задачі теорії пружності і термопружності є важливою частиною сучасної механіки деформівного твердого тіла. Їх актуальність визначається численним застосуванням цієї науки для вирішення важливих технічних і технологічних проблем у різних галузях виробництва. Необхідність таких досліджень зумовлена, передусім, знанням міцності матеріалів і елементів конструкцій. Як правило, екстремальні напруження досягаються в зонах розділу фаз, оскільки практично всі конструктивні матеріали неоднорідні за своєю структурою.

Важливою є проблема моделювання властивостей міжфазної межі з урахуванням реальних особливостей її структури. Отримання достовірної і повної інформації про розподіл напружень в елементах конструкцій пов'язане з використанням ефективних аналітичних і числових методів розв'язування просторових задач теорії пружності.

У просторових задачах теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропних тіл розв'язок представляється через потенціальні функції, які є гармонічними у спеціально вибраних системах координат. Це суттєво зменшує математичні труднощі, які виникають при розв'язуванні конкретних крайових задач [7; 10; 11].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останніми роками з'явились публікації як вітчизняних, так і зарубіжних вчених, в яких розглядаються задачі теорії пружності і термопружності для ізотропного середовища в умовах неідеального механічного і теплового контактів. Зокрема, у працях А. Т. Улітка, Ю. М. Неміша, Н. Е. Качаловської та ін. розглядаються осесиметричні задачі. Однак для трансверсально-ізотропного тіла з включеннями канонічної форми розв'язки таких задач майже відсутні. На відміну від проаналізованих задач для ідеального контакту, розв'язок останніх отримується не в замкнутому вигляді, а зводиться до розв'язування нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь [1–3].

Важливі результати в цьому напрямі отримані в роботах Я. С. Підстригача, Ю. М. Подільчука, побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат [7].

Постановка завдання. Наведено постановку задачі теорії пружності про розподіл нормальних, меридіальних і кругових напружень трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне включення у формі стиснутого сфероїда при рівномірному всесторонньому стиску та дії довільного лінійного температурного поля, залежно від геометрії включення [8].

Виклад основного матеріалу. Для трансверсально-ізотропного тіла загальний розв'язок рівнянь статичної термопружності представляється через потенціальні функції

$$u = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_4) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y},$$
$$v = \frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \quad (1)$$

$$w = \mathrm{k}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \mathrm{k}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \mathrm{k}_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}.$$

Функції $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ задовольняють рівняння Лапласа, і

$$\frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial^2 z} = \mathrm{k}_3 \mathrm{T},$$

де $\mathrm{k_j}$ – сталі, які залежать від пружних і теплових властивостей матеріалу [4; 6; 9].

Для розв'язування задачі використовувались системи координат для стиснутого сфероїда обертання:

$$x = a_j \sin\theta_j ch\eta_j \cos\varphi,$$
$$y = a_j \sin\theta_j ch\eta_j \sin\varphi, \tag{2}$$
$$z = \sqrt{\nu_j} a_j \cos\theta_j sh\eta_j, \ (j=1,2,3,4),$$
$$(0 \le \eta_j < \infty, 0 \le \theta_j \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi),$$

де ν_j корені відповідного характеристичного рівняння

$$\mathrm{c}_{11}\mathrm{c}_{44}\, v^2 - ({c_{44}}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2)v + c_{33}c_{44} = 0. \tag{3}$$

Для збіжності граничних поверхонь необхідне виконання рівностей для $(\eta_j = \eta_{j0})$:

$$a_1 ch\eta_{10} = a_2 ch\eta_{20} = a_3 ch\eta_{30};$$
$$a_1\sqrt{\nu_1} sh\eta_{10} = a_2\sqrt{\nu_2} sh\eta_{20} = a_3\sqrt{\nu_3} sh\eta_{30}. \tag{4}$$

Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь рівноваги, який відповідає дії лінійного температурного поля в середовищі $T_0 = ax + by + cz + d$, будуємо у вигляді [5; 12]

$$\Phi_4(\mathrm{x}, y, z) = \frac{1}{2} v_4 \mathrm{k}_1 \Bigg\{ \mathrm{A}_0 \int_{\mathrm{q}_4}^{\infty} (\mathrm{z}_4 - \mathrm{z}_4(\mu))^2 \frac{d\mu}{\Delta(\mu)} -$$
$$-\mathrm{C}\left[\int_{\mathrm{q}_4}^{\infty} \mathrm{z}_4^2(\mu)(\mathrm{z}_4 - \mathrm{z}_4(\mu)) \ \frac{d\mu}{(\mu^2-1)\Delta(\mu)} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{3}\int_{\mathrm{q}_4}^{\infty} (\ \mathrm{z}_4^3 - \mathrm{z}_4^3(\mu)) \ \frac{d\mu}{(\mu^2-1)\Delta(\mu)}\right] + \tag{5}$$
$$+(\mathrm{Ax} + \mathrm{By}) \int_{\mathrm{q}_4}^{\infty} (\mathrm{z}_4 - \mathrm{z}_4(\mu))^2 \frac{d\mu}{\mu^2\Delta(\mu)} \Bigg\},$$

де $\mathrm{z}_4(\mu) = \mathrm{a}_4\sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{a_4^2\mu^2}}, \quad \Delta(\mu) = \mu\sqrt{\mu^2 - 1}.$

Якщо до граничної поверхні сфероїда $(\eta_j = \eta_{j0})$ прикладено зусилля σ_{ij}^0, то розв'язок задачі про напружено-деформований стан у трансверсально-ізотропному середовищі зі сфероїдальним включенням за дії лінійного температурного і силового полів в умовах неідеального теплового і механічного контактів (ковзання без відриву) зведено до розв'язування однорідних рівнянь рівноваги з такими граничними умовами $(\eta_j = \eta_{j0})$, $j = 1,2,3$:

$$\sigma_\eta^{(1)} = \sigma_\eta^{(2)} + \sigma_\eta^{(\text{ч.н.})};\ \tau_{\eta\theta}^{(1)} + \tau_{\eta\theta}^{(\text{ч.н.})} = 0;$$
$$\tau_{\eta\theta}^{(1)} = 0;\ \tau_{\eta\varphi}^{(2)} + \tau_{\eta\varphi}^{(\text{ч.н.})} = 0;\ \tau_{\eta\varphi}^{(1)} = 0; \tag{6}$$
$$u_\eta^{(2)} + u_\eta^{(0)} + u_\eta^{(\text{ч.н.})} = u_\eta^{(1)} + u_\eta^{!}.$$

Індексом (1) позначено компоненти напружень і деформацій у включенні, (2) – аналогічні величини у середовищі. При цьому напружено-деформований стан у середовищі є сумою основного і додаткового, викликаного наявністю включення. Величини $\sigma_\eta^{(\text{ч.н.})}$, $u_\eta^{(\text{ч.н.})}$ отримано на основі частинного розв'язку (5), а $u_\eta^{(0)}$, $u_\eta^{!}$ – переміщення, викликані дією температурного поля у середовищі T_0 і визначеної за ним температури T_1 на основі граничної задачі з умовами неідеального теплового контакту:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(T_0 + T) = 0, \quad (x \,\overline{\in}\, \mathrm{D})$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T_1 = 0, \quad (x \in \mathrm{D}) \tag{7}$$
$$\mu_i(T_0 + T)_{,i} n_i \Big|_{\eta_{40}} = \mu_i T_{,i}\, n_i \Big|_{\eta_{40}} = \beta\,(T_1 - T_0 - T)\Big|_{\eta_{40}},$$

(D – область включення).

Розв'язок досліджуваних задач отримано на основі загальних розв'язків зовнішньої та внутрішньої задач теорії пружності для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда. У випадку дійсних і різних коренів характеристичного рівняння (3) потенціальні функції мають такий вигляд [4;13–15]:

$$\Phi_j(x,y,z_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1}\frac{n+m}{i(2n+1)}\left[\frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j)Q_{n+1}^{(m)}(i\overline{q}_j)}{(n+m)(n-m+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j)Q_{n-1}^{(m)}(i\overline{q}_j)}{(n-m)(n-m+1)}\right]\cdot(\delta_j a_{nm}^{(j)}\cos m\varphi+b_{nm}^{(j)}\sin m\varphi), \qquad (8)$$

$$(j=1,2,3,\ \delta_1=\delta_2=1,\delta_3=-1,i^2=-1)$$

де $P_n^{(m)}(p), Q_n^{(m)}(i\overline{q}_j)$ –приєднані функції Лежандра першого і другого родів, $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$ – невідомі сталі.

Для визначення коефіцієнтів $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$ з граничних умов (6), прирівнюючи вирази при однакових тригонометричних і сфероїдальних функціях, отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має складний структурний вигляд і має єдиний розв'язок, який знайдено методом редукції.

На рис. 1 і 2 наведено концентрацію напружень для сфероїдального включення різної геометрії $\frac{b}{a}=0,4;\,0,6;\,0,8$, коли на нескінченності задано одновісний стиск, тобто $\sigma_z^0=-c_0$.

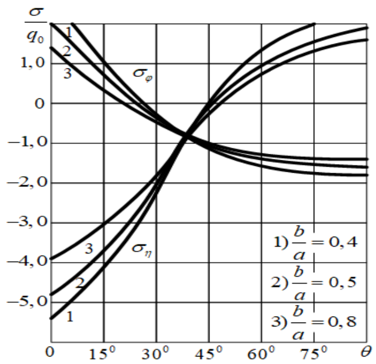

Рис.1. Характер концентрації нормальних та кругових напружень

Fig. 1. Character of concentration of normal and circular stresses

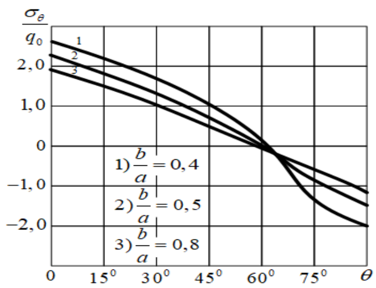

Рис.2. Характер концентрації меридіальних напружень

Fig. 2. Character of meridional stress concentration

Висновки. При одновісному стиску вздовж осі OZ нормальні та кругові напруження σ_η і σ_φ (див. рис. 1) перерозподіляються при $\theta=35-36^{\circ}$, спостерігається перехід від розтягувальних до стискальних напружень. Зміна знака меридіальних напружень σ_θ (див. рис. 2) має місце при $\theta=60^{\circ}$. При збільшенні відношення b/a осей сфероїда вздовж OZ і OX концентрація напружень спадає.

У разі рівномірного всестороннього стиску мінімальні стискальні напруження локалізуються біля полюса великої осі включення. Максимального значення нормальні та меридіальні напруження досягають на полюсі меншої осі сфероїда. Напруження мають стискальний характер і зростають при зменшенні відношення осей сфероїда b/a.

На основі отриманих розв'язків просторових задач теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропного середовища зі стиснутим сфероїдальним включенням в умовах неідеального механічного і теплового контактів, досліджено розподіл термонапружень як у середовищі, так і у включенні за дії довільного лінійного температурного і силового полів. Отримано інженерні формули для розрахунку концентрації напружень у середовищі та включенні за різних механічних навантажень – стиску, розтягу, зсуву, згину та кручення.

Бібліографічний список

1.Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46-48.

2.Бубняк Т. І. Розподіл напружень на поверхні порожнини у трансверсально-ізотропному середовищі. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2020. № 21. С. 5-9.

3.Бубняк Т., Семерак В., Пономаренко О., Богач М., Воліна Т. Про напруження в композитах при нагріванні. *Вісник Львівського національного університету природокористування. Серія «Агроінженерні дослідження»*. 2023. № 27. С. 32-37.

4. Максимук О., Щербина Я. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 4. С. 126-130.

5. Підстригач Я. С., Коляно Ю. М. Температурні поля, що не встановилися, і напруги в тонких пластинках. Київ: Наук. думка, 1972. 308 с.

6. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.

7. Подильчук Ю. Н. Граничні задачі статики пружних тіл. *Просторові задачі теорії пружності і пластичності*: в 5 т. Київ: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.

8. Семерак В. М., Іваник Є. Г., Сікора О. В. Застосування апроксимаційного методу при моделюванні та аналізі нестаціонарних теплових процесів внаслідок дії рухомих зон локального нагріву на основі трьохмірних рівнянь. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2010. № 11. С.14-27.

9. Семерак В. М., Косарчин В. І. Термонапружений стан в околі локальної ділянки фрикційного контакту. *Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження.* 2014. № 18. С. 271-275.

10. Соколовський Я. І. Напружений стан трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальнім механічнім контакті. Теоретическая и прикладная механика. 1995. Вип. 25. С. 17-26.

11. Соколовський Я. І., Бубняк Т. І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. Доп. НАН України. 1996. № 9. С. 45-50.

12. Шевчук В. А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2011. № 2. С. 179-185.

13. Attetkov A. V., Belyakov N. S. The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating. High Temperature. 2006. 44, No. 1. P. 139-143.

14. Ionescu-Cazimir V. Theoreme de reciprocitate pentru problema dinamica a termoelasticitii. An. Univ. Bucuresti. Ser. stiint. natur. 1963. Vol. 12, No. 39. P. 93-100.

15. Zorski H. On certain property of thermoelastic media. Bull. Acad, pol. sci. Ser. sci. techn. 1958. Vol. 6, No. 6. P. 331-339.

Стаття надійшла 15.06.2024