

УДК 539.3.01

**РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПІВПЛОЩИНІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ
ПРИ РОЗТЯГУ ПІД КУТОМ ДО ПРЯМОЛІНІЙНОГО КРАЮ**

**Олександр Пономаренко¹, к. ф.-м. н., Віктор Семерак¹, к. т. н.,
Олексій Бурнаєв¹, к. ф.-м. н., Орест Гавриляк²**

¹Львівський національний університет природокористування,
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н, Львівська обл., Україна,
e-mail: alexanderponomarenko54@gmail.com,
e-mail: semerakviktor@gmail.com, alexislviv@gmail.com

²ВСП «Автомобільно-дорожній коледж» Національного університету «Львівська
політехніка»,
вул. Личаківська 2, м. Львів, Україна,
e-mail: orestgavrilak@gmail.com

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2024.28.117>

**Пономаренко О., Семерак В., Бурнаєв О., Гавриляк О. Розподіл напружень у півплощині з
круговим отвором при розтягу під кутом до прямолінійного краю**

У сучасній промисловості та будівництві при проектуванні споруд і машин в авіабудуванні, кораблебудуванні, машинобудуванні широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може негативно вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції.

Тому вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів є важливим завданням як з теоретичного, так і з інженерного погляду. Отримано розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у півплощині з круговим отвором при розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю. Задача розв'язується, виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленій отвором півплощині і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв'язку з наявністю отвору. Задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурі отвору, на прямолінійному краю, та на нескінченності. Наукова новизна полягає в тому, що розв'язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактора, як орієнтування краю півплощини відносно поля навантажень у вигляді розтягу. Розв'язок задачі наведено у біполярних координатах. Отримано формули для напружень по контуру отвору та на прямолінійному краю, а також відомий результат для розтягу півплощини з круговим отвором уздовж прямолінійного краю. Отримано значення напружень для деяких часткових випадків для характерних точок на контурі отвору та на прямолінійному краю. Результати, отримані в роботі, дають змогу теоретично визначити коефіцієнт концентрації напружень біля отворів і можуть бути використані в інженерній практиці під час проектування деталей у корабле-, авіа- та машинобудуванні.

Ключові слова: концентрація напружень біля отворів, бігармонічні функції напружень, біполярні координати.

**Ponomarenko O., Semerak V., Burnaiev O., Havryliak O. Stress distribution in a half-plane with a
circular hole under tension at an angle to a straight edge**

In modern industries such as project construction, aircraft manufacturing, shipbuilding, and machine engineering, thin elastic plates are commonly used. Depending on various factors, these plates feature different types of holes, which can lead to strain concentration when loaded near these holes. This concentration of strain can have an unfavorable impact on the durability of the component. The distribution of strains around the contours of the holes is uneven, leading to small sections that experience high strain levels. These critical sections are often where brittle cracks or plastic deformations develop, potentially resulting in structural failure.

Therefore, studying the distribution of strains near curved holes is essential from both theoretical and engineering perspectives. This work presents a solution to the problem of stress concentration in a half-plane with a circular hole, subjected to stretching at an arbitrary angle to a straight edge. The problem is approached by utilizing the main stress function, which corresponds to the stress state in the half-plane without the hole. A second biharmonic function is added to this function, accounting for the additional stress state introduced by the hole's presence. The task involves finding a biharmonic stress function that satisfies the boundary conditions along the contour of the hole, on the straight edge, and at infinity. The novelty of this research lies in its provision of insights regarding the impact of the edge orientation of the half-plane concerning the tensile load field on stress concentration. The solution is

presented in bipolar coordinates, and formulas for the stresses along the contour of the hole and on the straight edge are derived. The stress values obtained for various key points along the hole's contour and the straight edge for specific cases provide a basis for establishing the coefficient of strain concentration near the holes. This information can be beneficial in engineering practices during the design and development of components in the aircraft, shipbuilding, and machine manufacturing industries.

Keywords: concentration of stresses near holes, biharmonic functions of stresses, bipolar coordinates.

Постановка проблеми. Одним із важливих завдань, що ставиться перед машинобудуванням, є раціональне та економне використання металу, підвищення технічного рівня та якості продукції машинобудування, її надійності та довговічності. Створення нових конструкцій машинобудування з легшою вагою при покращенні їхньої якості можливе лише в разі врахування дійсних умов роботи цих конструкцій у ділянці пружних деформацій.

У сучасній промисловості і будівництві при проектуванні споруд і машин в авіа-, корабле-, машинобудуванні широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які з різних міркувань послаблюються різноманітними отворами. При завантаженні таких деталей поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може негативно вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, які піддаються дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування конструкції. Тому вивчення розподілу напружень біля криволінійних отворів є важливим завданням як з теоретичного, так і з інженерного погляду.

Наше дослідження спрямоване на вивчення концентрації напружень у півплощині з круговим отвором при розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні проблеми концентрації напружень розглянуто у працях міжнародної наукової конференції, присвяченої 75-річчю академіка НАН України О. С. Космодам'янського [16]. У праці [1] описано застосування методів теорії пружності для дослідження та розрахунків металургійного обладнання. У працях [2; 5–9] наведено наближений метод визначення напруженого стану багатозв'язної ізотропної півплощини з отворами і тріщинами, розглянуто розв'язок циклічної задачі для пластини з отворами і тріщинами і її застосування в гірничій справі.

У публікації [3] описано дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та тріщиною. У монографії [4] викладено сучасні ефективні

методи визначення напруженого стану багатозв'язних однорідних і кусково-однорідних ізотропних пластинок з отворами, тріщинами і включеннями, наведено розв'язки різних класів задач, описано результати числових досліджень з їх аналізом і встановленням закономірностей впливу на значення напружень та їх концентрацію геометричних характеристик отворів, тріщин і включень, їх кількості і розміщення, фізико-механічних характеристик досліджуваних середовищ. У монографії [11] описано застосування методу функції комплексної змінної і конформних відображень стосовно задач теорії пружності. У праці [12] досліджується динамічна концентрація напружень на краю колового отвору за дії на нього неосесиметричного навантаження.

Надзвичайно широкий спектр задач розглянуто учасниками Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» у 2018 р., присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики у Львові [18]. У праці [10] досліджено напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності.

Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною проведено у праці [13]. Питання регуляризації формули обернення перетворення Лапласа стосовно визначення концентрації динамічних напружень у пластинках з отворами розглянуто у праці [17]. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин проаналізовано в праці [15]. У публікації [20] проведено дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин з отворами та включеннями. У праці [21] проведено скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями.

Постановка завдання. Метою дослідження є отримання розв'язку задачі теорії пружності про концентрацію напружень у півплощині круговим отвором при розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю.

Завданням дослідження є визначення коефіцієнтів концентрації напружень по контуру отвору і на прямолінійному краю залежно від напрямку розтягу та відстані отвору від прямолінійного краю.

Задача розв'язується, виходячи з основної функції напружень, що відповідає напруженому стану в неослабленій отвором півплощині, і до цієї функції напружень додається друга бігармонічна функція, яка відповідає додатковому напруженому стану, що виникає у зв'язку з наявністю отвору. Задача зводиться до знаходження бігармонічної функції напружень, яка задовольняє граничні умови на контурі отвору,

на прямолінійному краю та на нескінченності. Наукова новизна дослідження полягає в тому, що розв'язок цієї задачі дає відомості про вплив на концентрацію напружень такого фактору, як орієнтування краю півплощини відносно поля навантажень у вигляді розтягу.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу про розтяг півплощини з круговим отвором, контур якого вільний від зовнішніх зусиль. Нехай напружений стан на нескінченності слугує розтягом зусиллями p , що утворюють кут φ з віссю ОХ. Визначимо картину напруженого стану в півплощині.

Напружений стан у нескінченно-віддалених частинах площини буде [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(\infty)} &= p \cos^2 \varphi, \\ \sigma_y^{(\infty)} &= p \cos^2 \varphi, \\ \tau_{xy}^{(\infty)} &= p \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

а функція напружень матиме вигляд:

$$U_0(x, y) = \frac{p}{2} (y^2 \cos^2 \varphi + x^2 \sin^2 \varphi - x y \sin 2 \varphi). \quad (2)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} U_{0,1}(x, y) &= \frac{1}{2} p y^2 \cos^2 \varphi = k_1 y^2, \\ U_{0,2}(x, y) &= \frac{1}{2} p x^2 \sin^2 \varphi = k_2 x^2, \\ U_{0,3}(x, y) &= -\frac{1}{2} p x y \sin 2 \varphi = k_3 x y. \end{aligned} \quad (3)$$

Застосовуючи криволінійну систему координат вигляду:

$$x + i y = a \operatorname{cth}(a - i\beta)/2$$

або

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad (4)$$

подамо функцію напружень у вигляді суми:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 [U_{0,i}(\alpha, \beta) + a k_i U_{1,i}(\alpha, \beta)]. \quad (5)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення функцій напружень, що зникають на нескінченності і задовольняють граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha|_{\alpha=0} &= \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=0} = 0, \\ \sigma_\alpha|_{\alpha=c} &= \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=c} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Враховуючи однозначність переміщень і основний напружений стан, функції U_{1i} шукаємо у вигляді:

$$gU_{1,i}(\alpha, \beta) = G_i (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \alpha + (\mathcal{A}_{1,i} \operatorname{ch} 2 a + \mathcal{B}_{1,i} + \mathcal{C}_{1,i} \operatorname{sh} 2 a) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n,i}(a) \cos n\beta, \quad (i=1,2) \quad (7)$$

$$gU_{1,3}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,i}(a) \sin n\beta, \quad (8)$$

де

$$f_{n,i}(a) = \mathcal{A}_{n,i} \operatorname{ch}(n+1)a + \mathcal{B}_{n,i} \operatorname{ch}(n-1)a + \mathcal{C}_{n,i} \operatorname{sh}(n+1)a + \mathcal{D}_{n,i} \operatorname{sh}(n-1)a, \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

Використовуючи першу граничну умову (6):

$$\sigma_\alpha|_{\alpha=0} = \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=0} = 0,$$

отримуємо:

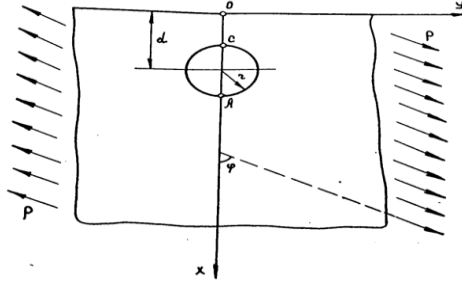


Рис. 1. Схема навантаження напівплощини
Fig. 1. Scheme of loading a half-plane

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,i} + \mathcal{B}_{n,i} &= 0 \\ (n+1)\mathcal{C}_{n,i} + (n-1)\mathcal{D}_{n,i} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо позначення:

$$E_{n,i} = -\mathcal{D}_{n,i}/(n+1), \quad \mathcal{C}_{n,i} = E_{n,i}(n-1). \quad (11)$$

Тоді бігармонічні функції (7) і (8) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} gU_{1,i}(\alpha, \beta) &= G_i(ch \alpha - \cos \beta)\alpha + (\mathcal{A}_{1,i}ch 2a - 1) \cos \beta + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \{ \mathcal{A}_{n,i}[ch(n+1)a - ch(n-1)a] + E_{n,i}[(n-1)sh(n+1)\alpha - \\ &-(n+1)sh(n-1)\alpha] \} \cos n\beta, \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} gU_{1,3}(\alpha, \beta) &= \mathcal{A}_{1,3}(ch 2a - 1) \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ \mathcal{A}_{n,3}[ch(n+1)a - \\ &-ch(n-1)a] + E_{n,3}[(n-1)sh(n+1)\alpha - (n+1)sh(n-1)\alpha] \} \sin n\beta. \end{aligned} \quad (13)$$

З граничних умов:

$$\sigma_{\alpha} |_{\alpha=c} = \tau_{\alpha\beta} |_{\alpha=c} = 0,$$

після перетворень отримаємо систему, розв'язками якої є такі величини:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{2}{ch 2c}, & \mathcal{A}_{1,1} &= \frac{e^{-2c}}{2ch 2c} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \mathcal{A}_{n,i} &= -n^2 sh^2 c + n sh c ch c - e^{-nc} sh nc, \\ \Delta \cdot E_{n,i} &= n sh^2 c, & \Delta &= 2(sh^2 nc - n^2 sh^2 c) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= \frac{-2}{ch 2c}, & \mathcal{A}_{1,2} &= \frac{-e^{-2c}}{2ch 2c}, \\ \Delta \cdot \mathcal{A}_{n,2} &= n^2 sh^2 c - n sh c ch c + e^{-nc} sh nc, \\ \Delta \cdot E_{n,2} &= -n sh^2 c, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_{1,3} &= \frac{-e^{-2c}}{2ch 2c}, \\ \Delta \cdot \mathcal{A}_{n,3} &= n^2 sh^2 c - n sh c ch c + e^{-nc} sh nc, \\ \Delta \cdot E_{n,3} &= -n sh^2 c. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Тоді для функцій напружень маємо:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 U_i(\alpha, \beta), \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{gU_1}{\alpha p \cos^2 \varphi} &= \frac{1}{ch 2c} [\alpha(ch \alpha - \cos \beta) + ch(2c - \alpha)sh \alpha \cos \beta] + \\ &+ \frac{1}{2} sh \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} [n sh c sh(\alpha - c)sh n \alpha - \\ &- sh \alpha sh n(\alpha - c)sh nc] \frac{\cos n\beta}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{gU_2}{\alpha p \sin^2 \varphi} &= \frac{1}{ch 2c} [\alpha(ch \alpha - \cos \beta) + sh \alpha ch(2c - \alpha) \cos \beta] + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\alpha} + \frac{1}{2} \cos \beta - \sum_{n=2}^{\infty} [n sh c sh(\alpha - c)sh n \alpha - \\ &- sh \alpha sh nc sh n(\alpha - c)] \frac{\cos n\beta}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{gU_3}{\alpha p \sin 2\varphi} &= -\frac{1}{sh 2c} sh(2c - \alpha)sh \alpha \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} [n sh c sh(\alpha - c)sh n \alpha - \\ &- sh \alpha sh n(\alpha - c)sh nc] \frac{\sin n\beta}{sh^2 nc - n^2 sh^2 c}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для напружень на контурі отвору маємо:

$$\sigma_{\beta|\alpha=c} = \sum_{i=1}^3 p\sigma_{\beta,i} \quad (21)$$

де

$$\sigma_{\beta,1} = 2\cos^2\varphi\left\{\left[1 - 2\left(\frac{sh\ c\ \sin\ \beta}{ch\ c - \cos\ \beta}\right)^2\right] + (ch\ \alpha - \cos\ \beta)\left(\frac{sh\ c}{ch\ 2\ c} + 2e^{-2c}\cos\ \beta + \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cos\ n\ \beta\right)\right\} \quad (22)$$

$$\sigma_{\beta,2} = -2\sin^2\varphi\left\{\left[1 - \frac{2sh^2\ c\ \sin^2\ \beta}{(ch\ c - \cos\ \beta)^2}\right] + (ch\ \alpha - \cos\ \beta)\left(\frac{sh\ c}{ch^2\ c} + 2e^{-2c}\cos\ \beta + \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cos\ n\ \beta\right)\right\}, \quad (23)$$

$$\sigma_{\beta,3} = -\sin\ 2\ \varphi\left\{\frac{8\ sh\ c\ \sin\ \beta\ (ch\ c\ \cos\ \beta - 1)}{(ch\ c - \cos\ \beta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} R_n \sin\ n\ \beta + e^{-2c}\sin\ \beta\right\} \cdot 4(ch\ c - \cos\ \beta), \quad (24)$$

$$R_n = \frac{1}{sh^2\ nc - n^2\ sh^2\ c} (2n^4\ sh^3\ c \cdot e^{-nc} - 2n^3\ sh\ c\ ch\ c\ e^{-nc} + \frac{3}{2}n^2\ ch\ c\ e^{-nc} - \frac{1}{2}n^2\ sh\ c\ e^{-3nc} - \frac{1}{2}n\ ch\ c \cdot e^{-nc} + \frac{1}{2}n\ ch\ c \cdot e^{-3cn}). \quad (25)$$

На прямолінійному краю для напружень отримаємо:

$$\sigma_{\beta|\alpha=0} = p \sum_{i=1}^3 \sigma_{\beta,i} \quad (26)$$

причому:

$$\frac{\sigma_{\beta,1}}{\cos^2\varphi} = 1 - (1 - \cos\ \beta)\left[-\frac{2e^{-2c}}{ch\ 2\ c}\cos\ \beta + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n^3\ sh^2\ c - n^2\ sh\ c\ ch\ c + ne^{-nc}\ sh\ n\ c) \frac{\cos\ n\ \beta}{sh^2\ nc - n^2\ sh^2\ c}\right], \quad (27)$$

$$\frac{\sigma_{\beta,2}}{\sin^2\varphi} = (1 - \cos\ \beta)\left[-\frac{2e^{-2c}}{ch\ 2\ c}\cos\ \beta + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n^3\ sh^2\ c - n^2\ sh\ c\ ch\ c + ne^{-nc}\ sh\ n\ c) \frac{\cos\ n\ \beta}{sh^2\ nc - n^2\ sh^2\ c}\right], \quad (28)$$

$$\frac{\sigma_{\beta,3}}{\sin\ 2\ \varphi} = 2(1 - \cos\ \beta)\left(-\frac{e^{-2c}}{sh\ 2\ c}\sin\ \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^3\ sh^2\ c - n^2\ sh\ c\ ch\ c + ne^{-nc}\ sh\ n\ c)\sin\ n\ \beta}{sh^2\ nc - n^2\ sh^2\ c}\right). \quad (29)$$

У випадку розтягу півплощини вздовж прямолінійного краю, тобто при $\varphi = \pi/2$, маємо відомий результат [19] для напружень на контурі отвору:

$$\frac{\sigma_{\beta}}{p} = 2\left\{\left[1 - 2\left(\frac{sh\ c\ \sin\ \beta}{ch\ c - \cos\ \beta}\right)^2\right] + (ch\ \alpha - \cos\ \beta)\left(\frac{sh\ c}{ch\ 2\ c} + 2e^{-2c}\cos\ \beta + \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cos\ n\ \beta\right)\right\} \quad (30)$$

а також на прямолінійному краю:

$$\frac{\sigma_{\beta}}{p}\Big|_{\alpha=0} = 1 - (1 - \cos\ \beta)\left[-\frac{2e^{-2c}}{ch\ 2\ c}\cos\ \beta + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n^3\ sh^2\ c - n^2\ sh\ c\ ch\ c + ne^{-nc}\ sh\ n\ c) \frac{\cos\ n\ \beta}{sh^2\ nc - n^2\ sh^2\ c}\right]. \quad (31)$$

У табл. 1 наведено значення напружень σ_{β}/p в точках O, C (рис. 1) для деяких значень кута φ і для деяких віддалей центру отвору від краю.

Значення напружень σ_{β}/p у точці A (рис. 1) подано в табл. 2.

У табл. 3 наведено значення напружень σ_{β}/p в точках O, C, A (рис. 1) при значенні кута $\varphi = 10^\circ$

Таблиця 1. Значення напружень σ_β/p у точках O, C .**Table 1.** Values of stresses σ_β/p in points O, C .

c	$\lambda = \frac{d}{r} = \text{chc}$	$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_O$			$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_C$		
		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 5^\circ$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 5^\circ$	$\varphi = 30^\circ$
0,00	1,0	-	-	-	-	-	-
0,60	1,19	-4,08	-3,98	-2,02	5,06	5,03	2,07
0,80	1,34	-1,96	-1,94	-0,90	4,37	4,35	2,23
1,00	1,54	-0,90	-0,88	-0,41	3,92	3,90	1,99
1,20	1,92	-0,27	-0,25	-0,10	3,61	3,58	1,84
1,40	2,15	0,13	0,12	0,10	3,40	3,34	1,74
1,60	2,18	0,41	0,40	0,25	3,25	3,19	1,64
1,80	3,11	0,59	0,59	0,33	3,16	3,03	1,12
2,00	3,76	0,72	0,71	0,40	3,10	3,00	1,09
2,20	4,57	0,81	0,80	0,45	3,06	2,83	1,07
∞	∞	1,00	1,00	0,54	3,01	2,95	1,54

Таблиця 2. Значення напружень σ_β/p у точках \mathcal{A} **Table 2.** Values of stresses σ_β/p in points \mathcal{A}

c	$\lambda = \frac{d}{r} = \text{chc}$	$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_{\mathcal{A}}$		
		$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 5^\circ$	$\varphi = 30^\circ$
0	1	4,00	3,93	2,04
0,60	1,19	3,36	3,31	1,72
0,80	1,34	3,27	3,22	1,67
1,00	1,54	3,20	3,15	1,64
1,20	1,92	3,15	3,10	1,11
1,40	2,15	3,12	3,07	1,10
1,60	2,18	3,09	3,04	1,09
1,80	3,11	3,07	3,01	1,07
2,00	3,76	3,05	2,99	1,06
2,20	4,57	3,04	2,98	1,06
∞	∞	3	2,95	1,54

Таблиця 3. Значення напружень σ_β/p у точках O, C, \mathcal{A} при значенні кута $\varphi = 10^\circ$ **Table 3.** Values of stresses σ_β/p in points O, C, \mathcal{A} by value corner $\varphi = 10^\circ$

α	$\lambda = \frac{d}{r}$	$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_O$	$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_C$	$\left[\frac{\sigma_\beta}{p}\right]_{\mathcal{A}}$
0,6	1,185	-3,958	4,912	3,261
0,8	1,337	-1,897	4,235	3,168
1,0	1,543	-0,868	3,801	3,104
1,2	1,811	-0,261	3,501	3,057
1,4	2,151	0,129	3,294	3,022
1,6	2,577	0,392	3,156	2,994
1,8	3,107	0,573	3,067	3,973
2,0	3,762	0,699	3,009	2,957
∞	∞	0,97	2,91	2,91

Висновки. Отримано розв'язок задачі теорії пружності про концентрацію напружень у півплощині з круговим отвором при розтягу під довільним кутом до прямолінійного краю та відомий результат для розтягу півплощини з круговим отвором вздовж прямолінійного краю. Аналіз та підрахунки показують, що значення максимального коефіцієнта концентрації напружень досягається у тій точці контуру, яка найближча до прямолінійного краю, тобто в точці С

(див. рис. 1) і прямує до 3 при віддаленні отвору від краю півплощини, а в точці О прямує до 1. Як видно з табл. 1, при $c = 0,60$, $\lambda = 1,19$, $\varphi = 0^\circ$ значення максимального коефіцієнта концентрації напружень дорівнює 5,06, при $\varphi = 5^\circ$ – 5,03, при $\varphi = 30^\circ$ – 2,07. При $c = 0,80$ $\lambda = 1,34$ значення максимального коефіцієнта концентрації напружень відповідно при $\varphi = 0^\circ$ – 4,37, при $\varphi = 5^\circ$ – 4,35, при $\varphi = 30^\circ$ – 2,23.

Як видно з табл. 3, при $c = 0,60$, $\lambda = 1,185$, $\varphi = 10^\circ$ значення максимального коефіцієнта концентрації напружень дорівнює 4,912.

При наближенні отвору до краю півплощини коефіцієнт концентрації напружень у точці С прямує до нескінченності.

Отримані результати дають змогу теоретично визначити коефіцієнт концентрації напружень у півплощині з отвором і можуть бути використані в інженерній практиці під час проектування деталей у кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні.

Бібліографічний список

1. Бейгул О. О., Лепетова Г. Л. Методи теорії пружності для дослідження і розрахунків металургійного обладнання: навч. посіб. Дніпродзержинськ: Дніпродзерж. держ. техн. ун-т, 2014. 188 с.
2. Вакуленко С. В., Калоєров С. А. Приближенный метод определения напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 2002. Вып. 35. С. 65–76.
3. Довбня К., Врублевський В. Дослідження напруженого стану в ортотропній пластині з двома круговими отворами та тріщиною. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 33–35.*
4. Калоєров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. Донецк: Донецк. нац. ун-т, 2013. 440 с.
5. Калоєров С. А., Авдюшина Е. В. Напряженное состояние горного массива с выработками вблизи загруженной дневной поверхности. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія гірничо-електромеханічна*. 2004. Вип. 83. С. 129–134.
6. Калоєров С. А., Авдюшина Е. В. Напряженное состояние горного массива с выработкой вблизи дневной поверхности. *Деформация и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках: сб. науч. тр. X Междунар. науч. школы, г. Алушта, 18-24 сент. 2000 г. Симферополь, 2000. С. 60–62.*
7. Калоєров С. А., Вакуленко С. В. Решение циклической задачи для пластинки с отверстиями и трещинами и ее приложение в горном деле. *Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки*. 2004. № 1. С. 37–42.
8. Калоєров С. А. Приближенный метод исследования напряженного состояния изотропной полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 2004. Вып. 39. С. 83–93.
9. Калоєров С. А. Решение основных задач теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами. *Теоретическая и прикладная механика*. 1998. Вып. 28. С. 157–171.
10. Кравець В. Напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 44–47.*
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.
12. Онишко Л. Й., Варивода Ю. Ю., Пономаренко О. М. Дослідження динамічної концентрації напружень на краю колового отвору за дії на нього несиметричного навантаження. *Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С. З. Гжицького*. 2011. 13, № 4 (50), ч. 4. С. 106–114.
13. Проценко В., Українець Н. Аналіз напружено-деформованого стану півпростору з нескінченною циліндричною порожниною. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 85–87.*
14. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
15. Слободян М., Цуркан М. Розтяг пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами з урахуванням пластичних зон поблизу їх вершин. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 96–98.*
16. Современные проблемы концентрации напряжений: тр. Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию академика НАН Украины А. С. Космодамианского (г. Донецк, 21-25 июня 1998 г.). Донецк, 1998. 287 с.
17. Соляр Т., Максимович О. Регуляризація формули обернення перетворення Лапласа стосовно вивчення концентрації динамічних напружень у пластинах з отворами. *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 161–163.*
18. Сучасні проблеми механіки і математики: праці Міжнар. наук. конф., присвяч. 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я. С. Підстригача (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): у 3 т. Львів: ІППММ, 2018.

19. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 402 с.

20. Шопя Т. Дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин з отворами та включеннями. *Сучасні проблеми механіки і МАТЕМАТИКИ*: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Львів, 22-25 трав. 2018 р.): в 3 т. Львів: ІППММ, 2018. Т. 2. С. 168–169.

21. Гарт Е., Семенча О. Скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин, циліндричних і конічних оболонок з отворами і стрічковими включеннями. *Сучасні проблеми механіки та математики – 2023: матеріали Міжнародної наукової конференції* (м. Львів, 23-25 травня 2023р.): Львів: ІППММ, 2023. С. 173–174.

Стаття надійшла 23.05.2024