

## ПРО НАПРУЖЕННЯ В КОМПОЗИТАХ ПРИ НАГРІВАННІ

Тарас Бубняк<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., Віктор Семерак<sup>1</sup>, к. т. н.,  
Олександр Пономаренко<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., Мар'яна Богач<sup>1</sup>, к. е. н., Тетяна Воліна<sup>2</sup>, к. т. н.

<sup>1</sup>Львівський національний університет природокористування,  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н,  
Львівська обл., Україна,  
e-mail: semerakvictor@gmail.com

<sup>2</sup>Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, Україна,  
Сумський національний аграрний університет,  
вул. Герасима Кондратьєва, 160, м. Суми, Україна,  
e-mail: t.n.zaharova@ukr.net

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2023.27.084>

### Бубняк Т., Семерак В., Пономаренко О., Богач М., Воліна Т. Про напруження в композитах при нагріванні

Просторові задачі теорії пружності часто виникають при вирішенні різних технічних і технологічних проблем сучасного виробництва, зокрема при побудові композитних матеріалів та елементів конструкцій.

Поведінку конструктивних матеріалів можна вивчати на трьох структурних рівнях: макро-, мікро- і атомарному. У будівельній механіці поняття суцільного середовища має зміст тільки на мікрорівні. Врахування впливу неоднорідності матеріалу на цьому рівні при аналізі макронапружень суттєво залежить від розміру самої конструкції.

З розвитком і впровадженням нових конструкційних матеріалів виникає необхідність вміння оцінювати їх міцнісні властивості при різних видах навантаження.

При створенні композитних матеріалів включення, що виникають у матриці, суттєво впливають на напружено-деформівний стан композиту в цілому при різних механічних чи теплових навантаженнях.

Досягнення компонентами напружень екстремальних значень на межі розділу фаз зумовлене в одних випадках технологією виробництва, а в інших – неоднорідність вводиться з метою покращання міцності матеріалу.

Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови.

Одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дозволяє шукати розв'язок у вигляді рядів.

Важливі результати в цьому напрямі отримані в роботах Ю. М. Коляно, Я. С. Підстригача, Ю. М. Подільчука та багатьох інших, в яких побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

У роботі розглядається задача про розподіл термонапружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей включення у формі стиснутого сфероїда при рівномірному нагріві.

При розв'язуванні просторових задач теорії пружності зі сфероїдальними включеннями, зокрема тут, зручно користуватись системами координат для стиснутого сфероїда.

Проведені дослідження свідчать про те, що при рівномірному нагріві середовища  $T^0 = cz$  напруження на поверхні включення мають локальний характер як уздовж осі  $X$ , так і вздовж осі  $Z$ . Концентрація напружень швидко згасає при віддаленні від поверхні включення, прямуючи до нульового значення.

**Ключові слова:** потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

### Bubniak T., Semerak V., Ponomarenko O., Bohach M., Volina T. On tension in composites under heating

Spatial problems of the theory of elasticity often arise when solving various technical and technological problems of modern production, in particular when building composite materials and structural elements.

The behavior of structural materials can be studied at three structural levels: macro-, micro-, and atomic level. In construction mechanics, the concept of continuous medium is essential only at the micro level. Consideration of the effect of material heterogeneity at this level in the analysis of macrostresses significantly depends on the size of the structure itself.

Development and introduction of new structural materials require evaluating their strength properties under various types of load.

When creating composite materials, the inclusions that appear in the matrix significantly affect the stress-strain state of the composite as a whole under various mechanical or thermal loads.

The achievement of extreme values by stress components at the interface of phases is due to the production technology in some cases, and, heterogeneity in others. It is introduced to improve the strength of the material.

The study of spatial problems of the static theory of elasticity and thermoelasticity for homogeneous isotropic and anisotropic bodies in the general formulation is associated with great mathematical difficulties caused by the complexity of constructing a solution of a system of partial differential equations that satisfies the boundary conditions.

One of the effective methods of solving problems of elasticity theory is the Fourier method, which is based on the representation of general solutions of equilibrium equations through potential functions. A feature of the Fourier method is the use of different representations of the solution of the Lamé equations through harmonic functions, which allows searching for a solution in the form of a series.

In this direction, important results were presented in the works of Yu. M. Koliano, Ya. S. Pidstryhach, Yu. M. Podilchuk and many others, in which exact solutions of spatial problems of the theory of elasticity and static thermoelasticity in spherical, cylindrical, spheroidal, parabolic and other coordinate systems are constructed.

The paper considers the problem of distribution of thermal stresses in an unbounded transversely isotropic medium, which contains anisotropic inclusions in the form of a compressed spheroid with uniform heating, relative to mechanical and thermal properties.

When solving spatial problems of the theory of elasticity with spheroidal inclusions, it is convenient to use coordinate systems for a compressed spheroid.

The conducted studies show that with uniform heating of the medium, the stresses on the inclusion surface are local both along the X axis and along the Z axis.

**Key words** : potential functions, transversally isotropic medium, imperfect contact, spheroid, field of pressure.

**Постановка проблеми.** Просторові задачі теорії пружності часто виникають при вирішенні різних технічних і технологічних проблем сучасного виробництва, зокрема при побудові композитних матеріалів та елементів конструкцій.

Поведінку конструктивних матеріалів можна вивчати на трьох структурних рівнях: макро-, мікро- і атомарному. У будівельній механіці поняття суцільного середовища має зміст тільки на мікрорівні. Врахування впливу неоднорідності матеріалу на цьому рівні при аналізі макронапружень суттєво залежить від розміру самої конструкції.

З розвитком і впровадженням нових конструкційних матеріалів виникає необхідність уміти оцінювати їх міцнісні властивості при різних видах навантаження [6].

При створенні композитних матеріалів включення, що виникають у матриці, суттєво впливають на напружено-деформівний стан композиту в цілому при різних механічних чи теплових навантаженнях.

Досягнення компонентами напружень екстремальних значень на межі розділу фаз зумовлене в одних випадках технологією виробництва, а в інших – неоднорідність вводиться з метою покращання міцності матеріалу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження просторових задач статичної теорії пружності і термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв'язку системи диференціальних

рівнянь у частинних похідних, який задовольняє граничні умови [9].

Одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ламе через гармонічні функції, що дозволяє шукати розв'язок у вигляді рядів [10].

Важливі результати в цьому напрямі отримані в роботах Ю. М. Коляно, Я. С. Підстригача, Ю. М. Подільчука та багатьох інших, в яких побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат.

**Постановка завдання.** У роботі розглядається задача про розподіл термонапружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей включення у формі стиснутого сфероїда при рівномірному нагріві.

**Виклад основного матеріалу.** Одним з ефективних методів розв'язування просторових задач теорії пружності є метод Фур'є, який полягає у представленні загального розв'язку рівнянь рівноваги через потенціальні функції [6].

Розглянемо систему рівнянь задачі статичної термопружності за відсутності масових сил що забезпечують збіжність граничних поверхонь.

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial V}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial x}, \\
 & \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial U}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial y}, \\
 & c_{44} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \beta' \frac{\partial T}{\partial y}, \\
 & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta'' \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де  $c_{ij}$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$  – сталі характеризують механічні й теплові властивості тіла.

Розв'язок рівнянь (1) при дійсних різних коренях характеристичного рівняння виражається через чотири потенціальні функції [6; 9]:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial y}, \\
 W &= k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + k_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ці функції задовольняють умови

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0, \quad (j = \overline{1,4}), \quad \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = k_3 T, \tag{3}$$

де  $v_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$ ,  $v_4 = \beta''$ , а величини  $v_1, v_2$  – корені відповідного характеристичного рівняння [10].

При розв'язуванні просторових задач теорії пружності зі сфероїдальними включеннями, зокрема тут, зручно користуватись системами координат для стиснутого сфероїда [9; 10]  $(\eta_j, \theta_j, \varphi)$ :

$$\begin{aligned}
 x &= a_j \text{ch} \eta_j \sin \theta_j \cos \varphi, & y &= a_j \text{ch} \eta_j \sin \theta_j \sin \varphi, & z &= \lambda_j a_j \text{sh} \eta_j \cos \theta_j, & \text{причому} & \\
 0 \leq \eta_j < \infty, & 0 \leq \theta_j < \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. & & & & \text{Введемо} & \text{позначення:}
 \end{aligned}$$

$\text{ch} \eta_j = q_j$ ,  $\text{sh} \eta_j = \bar{q}_j$ ,  $\cos \theta_j = p_j$ ,  $\sin \theta_j = \bar{p}_j$ ,  $\text{ch} \eta_{j0} = q_{j0}$ ,  $\text{sh} \eta_{j0} = \bar{q}_{j0}$ . На граничній поверхні сфероїда  $(\eta_j = \eta_{j0} = \text{const})$  виконуються рівності

$$a_1 q_{10} = a_2 q_{20} = a_3 q_{30}, \quad \lambda_1 a_1 \bar{q}_{10} = \lambda_2 a_2 \bar{q}_{20} = \lambda_3 a_3 \bar{q}_{30},$$

Позначимо температуру, пружні характеристики, коефіцієнти лінійного розширення і теплопровідності трансверсально-ізотропного середовища  $T^0, c_{ij}, \alpha, \alpha_1, \lambda, \lambda_1$ ; а через  $T', c'_{ij}, \alpha', \alpha'_1, \lambda', \lambda'_1$  – відповідні характеристики включення. Для ідеального теплового контакту  $T^0 = T'$ . При дії температури  $T^0$  в середовищі виникають переміщення

$$U^0 = T^0 d_1 x, \quad V^0 = T^0 d_1 y, \quad W^0 = T^0 d_2 z, \tag{4}$$

$$\text{де } d_1 = \frac{c_{13}(2\alpha c_{13} + \alpha_1 c_{33}) - \alpha c_{33}(c_{11} + c_{12})}{2c_{13}^2 - c_{33}(c_{11} + c_{12})}, \quad d_2 = \frac{2\alpha c_{13}(c_{11} + c_{12}) - (c_{11} + c_{12})(2\alpha c_{13} + \alpha_1 c_{33})}{2c_{13}^2 - c_{33}(c_{11} + c_{12})}.$$

Для ідеального контакту маємо граничні умови на поверхні  $(\eta_j = \eta_{j0})$ :

$$\sigma_{ij}\eta_j = \sigma'_{ij}\eta_j, \quad \bar{U}(T^0) + \bar{U}_q = \bar{U}'(T^0) + \bar{U}' \quad (5)$$

Припустимо, що переміщення у включенні мають теж лінійний характер

$$U' = A_1 T_1' x, \quad V' = A_1 T_1' y, \quad W' = C_1 T_2' z, \quad (6)$$

де  $A_1, C_1$  – поки що невідомі величини.

Враховуючи формули (4-6), отримаємо переміщення на поверхні сфероїда при додатковому напруженому стані [1; 2; 7; 8]:

$$\begin{aligned} U_q &= -(A_1 - d_1)T'a_j q_{j0} P_1^{(1)}(p_j) \cos \varphi; \\ V_q &= -(A_1 - d_1)T'a_j q_{j0} P_1^{(1)}(p_j) \sin \varphi; \\ W_q &= (C_1 - d_2)T'\lambda_j a_j \overline{q_{j0}} P_1(p_j). \end{aligned} \quad (7)$$

У включенні додатковий напружений стан описується переміщеннями

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{a_{10}^{(j)}}{4a_j} P_1^{(1)}(p_j) Q_1^{(1)}(i\overline{q_j}) \cos \varphi; \\ V_j &= \frac{a_{10}^{(j)}}{4a_j} P_1^{(1)}(p_j) Q_1^{(1)}(i\overline{q_j}) \sin \varphi; \end{aligned} \quad (8)$$

$$W_j = \frac{k_j}{2a_j \lambda_j} P_1(p_j) Q_1(i\overline{q_j}) a_{10}^{(j)}, \quad j=1,2; \quad i^2 = -1.$$

Невідомі величини  $a_{10}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) знаходимо зі системи рівнянь [3–5; 11]:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \frac{2}{a_j} Q_1^{(1)}(i\overline{q_{j0}}) a_{10}^{(j)} = -8a_j q_{j0} (A_1 - d_1) T', \\ \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{a_j \lambda_j} Q_1(i\overline{q_{j0}}) a_{10}^{(j)} = 2\lambda_j a_j \overline{q_{j0}} (C_1 - d_2) T'. \end{cases} \quad (9)$$

Аналітичні розрахунки дають компоненти напружень у середовищі біля включення, уздовж осі  $Z$  ( $\theta_j = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \sum_{j=1,2} \left( \frac{c_{13}}{v_j} k_j - \frac{c_{11} + c_{13}}{2} \right) \left( Q_0(i\overline{q_j}) - \frac{\overline{q_j}}{q_j^2} \right) \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2}, \\ \sigma_z &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} \left( Q_0(i\overline{q_j}) - \frac{\overline{q_j}}{q_j^2} \right) \left( c_{33} \frac{k_j}{v_j} - c_{13} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогічно напруження вздовж осі  $X$  ( $\theta_j = 90^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{a_j^2 q_j q_j^2}, \\ \sigma_x + \sigma_y &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} \left( c_{11} + c_{12} - 2c_{13} \frac{k_j}{v_j} \right) \left( \frac{1}{q_j} - Q_0(i\overline{q_j}) \right), \\ \sigma_z &= \sum_{j=1,2} \frac{a_{10}^{(j)}}{2a_j^2} Q_0(i\overline{q_j}) \left( c_{33} \frac{k_j}{v_j} - c_{13} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Числові розрахунки зроблені для матеріалів з такими пружними і тепловими характеристиками [3; 12–14]:

трансверсально-ізотропне середовище

$$c_{11} = 5,97; c_{12} = 2,62; c_{13} = 2,17; c_{33} = 6,17; \lambda = 61,06; \lambda_1 = 80,84; \alpha = 5,0; \alpha_1 = 3,5;$$

трансверсально-ізотропне включення

$$c'_{11} = 12,1; c'_{12} = 4,81; c'_{13} = 4,42; c'_{33} = 5,13; \lambda' = 66,96; \lambda'_1 = 78,0; \alpha' = 27,0; \alpha'_1 = 34.$$

Характер концентрації нормальних, меридіальних і кругових напружень уздовж осі  $X$  можна побачити на рис. 1. На рис. 2 зображено розподіл напружень уздовж осі  $Z$ .

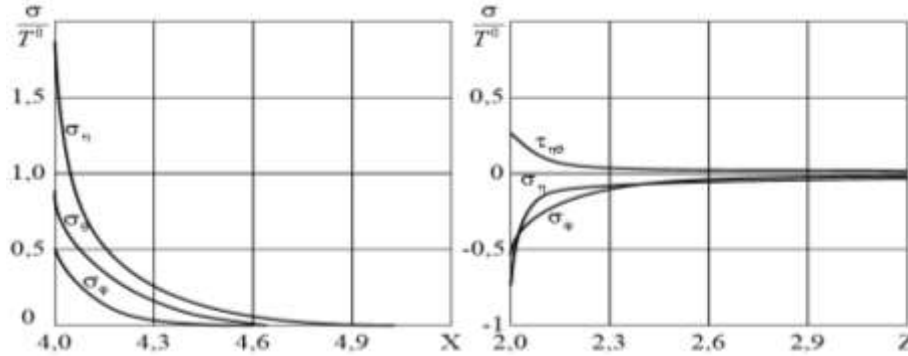


Рис. 1. Характер концентрації нормальних, меридіальних і кругових напружень уздовж осі  $X$ .  
Fig. 1. Character of the concentration of normal, meridional and circular stresses along the  $X$  axis.

**Висновки.** Проведені дослідження свідчать про те, що при рівномірному нагріві середовища  $T^0 = cz$  напруження на поверхні включення  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  ( $a = b = 4, c = 2$ ) мають локальний характер як уздовж осі  $X$ , так і уздовж осі  $Z$ . Концентрація напружень швидко згасає при віддаленні від поверхні включення, прямуючи до нульового значення [1; 2; 9; 10].

#### Бібліографічний список

1. Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46-48.
2. Бубняк Т. І. Розподіл напружень на поверхні порожнини у трансверсально-ізотропному середовищі. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2020. № 21. С. 5-9.
3. Максимум О., Щербина Я. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів. *Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика*. 2002. Вип. 4. С. 126-130.
4. Підстригач Я. С., Коляно Ю. М. Температурні поля, що не встановилися, і напруги в тонких пластинках. Київ: Наук. думка, 1972. 308 с.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
6. Подильчук Ю. Н. Граничні задачі статички пружних тіл. *Просторові задачі теорії пружності і пластичності*: в 5 т. Київ: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.

Рис. 2. Характер концентрації дотичних, нормальних і кругових напружень уздовж осі  $Z$ .  
Fig. 2. Character of the concentration of tangential, normal and circular stresses along the  $Z$  axis.

7. Семерак В. М., Іваник Є. Г., Сікора О. В. Застосування апроксимаційного методу при моделюванні та аналізі нестационарних теплових процесів внаслідок дії рухомих зон локального нагріву на основі трьохмірних рівнянь. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2010. № 11. С.14-27.
8. Семерак В. М., Косарчин В. І. Термо-напружений стан в околі локальної ділянки фрикційного контакту. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Агроінженерні дослідження*. 2014. № 18. С. 271-275.
9. Соколовський Я. І. Напружений стан трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальнім механічному контакті. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вип. 25. С. 17-26.
10. Соколовський Я. І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. *Доп. НАН України*. 1996. № 9. С. 45-50.
11. Шевчук В. А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багаточаровим покриттям. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2011. № 2. С. 179-185.
12. Attetkov A. V., Belyakov N. S. The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating. *High Temperature*. 2006. 44, No. 1. P. 139-143.
13. Ionescu-Cazimir V. Theoreme de reciprocitate pentru problema dinamica a termo-elasticității. *An. Univ. Bucuresti. Ser. stiint. natur.* 1963. Vol. 12, No. 39. P. 93-100.
14. Zorski H. On certain property of thermoelastic media. *Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn.* 1958. Vol. 6, No. 6. P. 331-339.

Стаття надійшла 30.04.2023