

## ОГЛЯД РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Роман Шеремета

Львівський національний аграрний університет,  
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Жовківський р-н, Львівська обл., Україна  
e-mail: romansheremeta@ukr.net

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2018.01.022>

**Постановка проблеми.** Для моделювання механічних процесів операцій переробки та зберігання сільськогосподарської продукції необхідно враховувати структурно-механічні властивості оброблюваного продукту та його стійкість до пошкодження під час попередньої обробки та транспортування, а також за різних режимів взаємодії з виконавчими органами машин у процесі переробки.

**Постановка завдання.** Наше завдання – провести аналіз існуючих реологічних моделей та окреслити область їх можливого застосування для біологічних матеріалів.

**Виклад основного матеріалу.** Реологія – наука про деформацію і текучість речовини. Ця наука розглядає процеси, пов'язані з незворотними залишковими деформаціями й текучістю різноманітних в'язких і пластичних матеріалів, явища релаксації напружень [1].

Термін «реологія» ввів американський учений Ю. Бінгам, якому належать цінні реологічні дослідження рідин і дисперсних систем. Офіційно термін «реологія» прийнятий на 3-му симпозіумі по пластичності (1929, США), однак окремі положення реології були встановлені задовго до цього. Історичні джерела реології в широкому сенсі сягають дуже давніх часів, коли людство тільки почало усвідомлювати особливості механічної поведінки навколишнього матеріального світу [1].

Механіка деформівного твердого тіла вивчає поведінку твердих тіл в умовах навантажень:

- *теорія пружності* описує матеріали, які відновлюють свою форму після припинення силового впливу на них;
- *теорія пластичності* описує матеріали (тіла), що набувають незворотної деформації після прикладання до них силових впливів;
- *механіка руйнування* описує закономірності зародження й розвитку неоднорідностей і дефектів структури матеріалу типу тріщин,

дислокацій, пор, включень тощо за статичних і динамічних навантажень.

Основними реологічними властивостями є пружність, пластичність, в'язкість, міцність.

**Основні реологічні моделі.** У реології механічні властивості матеріалів мають вигляд реологічних моделей, в основу яких покладено три ідеальні закони, що пов'язують напруження з деформацією. Їм відповідають три елементарні моделі ідеалізованих матеріалів, які характеризуються основними реологічними властивостями (пружність, пластичність, в'язкість):

- ідеально пружне тіло Гука (лінійне еластичне тіло);
- ідеально в'язке тіло Ньютона (ньютонівська рідина);
- ідеально пластичне тіло Сен-Венана – Кулона.

Лінійне еластичне тіло, *тіло Гука* (модель Гука), відображає поведінку ідеально пружного (без втрат) твердого матеріалу. Згідно з цією моделлю напруження є пропорційним деформації:

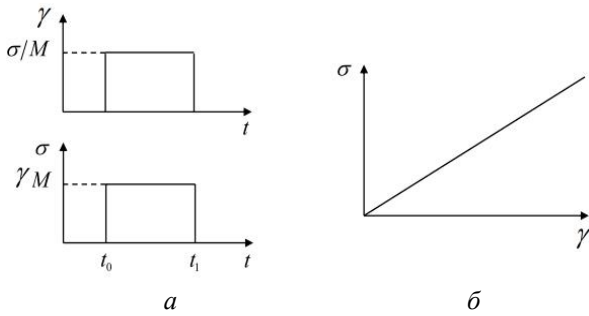
$$\sigma(t) = E \cdot \gamma(t), \quad (1)$$

де  $\sigma(t)$  – напруження як функція часу  $t$ ;  $E$  – незалежний від часу модуль пружності (модуль Юнга), МПа;  $\gamma(t)$  – деформація як функція часу.

Згідно з моделлю Гука прикладання навантаження дає миттєву деформацію. Зняття навантаження дає миттєве та повне відновлення форми. Тіло Гука не має пам'яті: напруження в заданий момент часу залежить тільки від деформації в той самий час. Тіло Гука показано на рис. 1. Діаграму часу напруження для постійного напруження, що застосовується в момент часу  $t_0$  і видаляється з часом [14; 16], показано на рис. 2, а, деформаційну діаграму – на рис. 2, б.



Рис. 1. Тіло Гука  
Fig. 1. Body of Hook



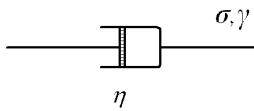
**Рис. 2.** Діаграма напруження тіла Гука від часу для постійного напруження, що прикладається в момент часу  $t_0$  і знімається з часом (а), діаграма деформації (б)

**Fig. 2.** Diagram strain Hooke body occasionally for constant voltage that is applied at time  $t_0$  and removed over time (a), diagram of deformation (б)

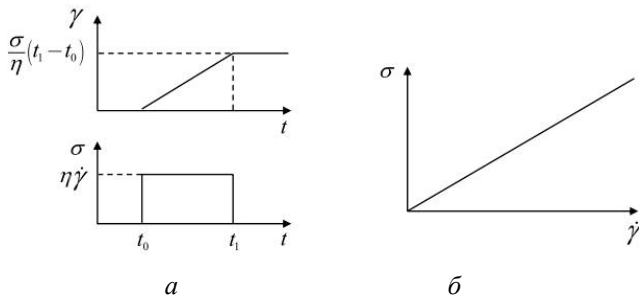
Лінійне в'язке тіло, **тіло Ньютона** (модель Ньютона, елемент Ньютона) представляє іншу екстремальну поведінку в розмаїтті лінійних реологічних тіл, поведінку в'язкої рідини. Напруження є пропорційним швидкості деформації:

$$s(t) = h \cdot g(t), \quad (2)$$

де  $\eta$  – в'язкість, незмінна з часом, Па·с.



**Рис. 3.** Тіло Ньютона  
**Fig. 3.** Newton's Body



**Рис. 4.** Діаграма напруження тіла Ньютона від часу для постійного напруження, що прикладається в момент часу  $t_0$  і знімається з часом (а), діаграма деформації (б)

**Fig. 4.** Diagram strain Newton's body occasionally for constant voltage that is applied at time  $t_0$  and removed over time (a), diagram of deformation (б)

Прикладення навантаження дає негайну лінійно зростаючу деформацію. Зняття навантаження не призводить до зникнення деформації – відновлення не відбувається, тіло Ньютона (рис. 3)

має пам'ять. Діаграма деформації в часі для постійного напруження, що прикладається в момент часу  $t_0$  і знімається в часі  $t_1$ , показана на рис. 4, а, діаграма напружено-деформованого діапазону – на рис. 4, б.

Біологічний аналог тіла Ньютона – різні біологічні рідини: плазма крові, лімфа.

Ідеально пластичне **тіло Сен-Венана – Кулона** – це тверде тіло, що знаходиться на площині, при русі якого тертя є постійним і не залежить від нормальної сили (рис. 5, а). В основі цієї моделі лежить закон зовнішнього (сухого) тертя, відповідно до якого деформація відсутня, якщо напруження зсуву менше деякої величини  $\sigma_T$ , яка називається межею текучості. Якщо навантаження досягає межі текучості, то розвивається деформація ідеально пластичного тіла, яка не має межі, і течія відбувається з будь-якою швидкістю (рис. 5, б).

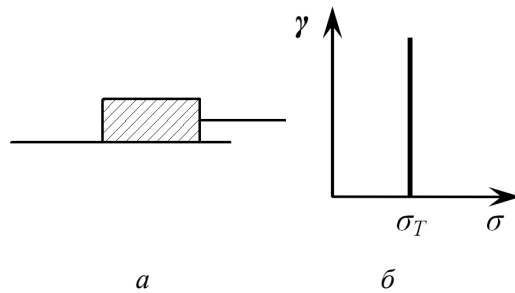
Величина  $\sigma_T$  відображає міцність структури тіла [7]:

$$\sigma < \sigma_T \quad \gamma = 0.$$

При досягненні межі текучості розвивається деформація ідеально пластичного тіла, яка не має межі, і течія відбувається з будь-якою швидкістю:

$$\sigma = \sigma_T \quad \gamma > 0.$$

Величина  $\sigma_T$  відображає міцність тіла. При  $\sigma = \sigma_T$  структура ідеального пластичного тіла руйнується, після чого опір навантаженню повністю відсутній.



**Рис. 5.** Модель ідеально пластичного тіла Сен-Венана – Кулона (а) та залежність деформації цього тіла від напруження (б)

**Fig. 5.** The model of the perfectly plastic body of Saint-Venant – Coulomb (a), the dependence of the deformation of this body on strain (б)

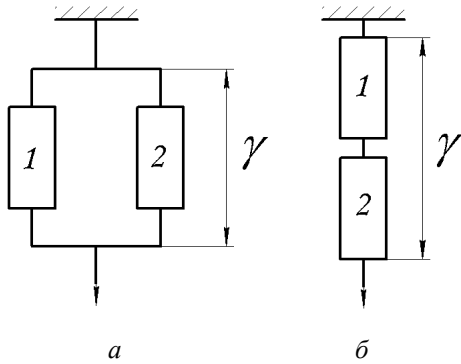
Біологічним прикладом моделі можуть слугувати патологічно змінені суглоби опорно-рухового апарату людини.

Порівняння ідеальних реологічних моделей показує, що енергія, яка витрачається на дефор-

мацію пружного тіла Гука, повністю витрачається на відновлення до початкової форми після припинення дії навантаження, а при деформації в'язкого і пластичного тіл енергія перетворюється на теплоту.

**Складні реологічні моделі.** Різноманітні реологічні властивості реальних тіл можна моделювати за допомогою різноманітних комбінацій трьох ідеальних моделей. У роботі [10] передбачається як основна аксіома, що будь-який реальний матеріал володіє всіма фундаментальними реологічними властивостями, але в різному співвідношенні.

Складні моделі складаються з декількох ідеальних моделей, з'єднаних паралельно або послідовно (рис. 6).



**Рис. 6.** Схеми паралельного (а) і послідовного (б) з'єднання моделей  
**Fig. 6.** Schemes of parallel (a) and serial (b) connection of models

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 6, а) повне навантаження складається з навантажень окремих елементів, а повна деформація  $\gamma$  однакова для всіх елементів:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_1 + \sigma_2; \quad \gamma_{\Sigma} = \gamma_1 = \gamma_2. \quad (3)$$

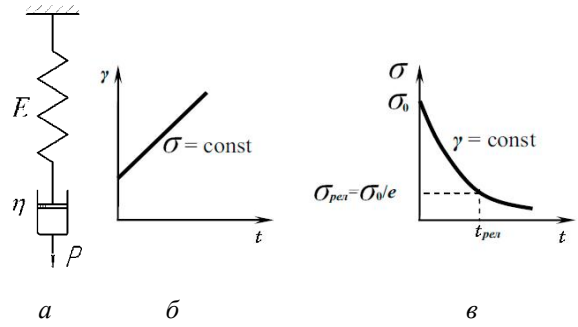
При послідовному з'єднанні елементів (рис. 6, б) повне напруження  $\sigma$  припадає на кожний елемент, а повна деформація  $\gamma$  складається з деформацій елементів, що складають систему:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_1 = \sigma_2; \quad \gamma_{\Sigma} = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (4)$$

**Модель Максвелла.** Реальні тіла, особливо структуровані системи, мають одночасно властивості твердого і рідкого тіл. Механічні властивості були змодельовані Максвеллом за допомогою послідовного з'єднання елементів Гука ( $G$ ) і Ньютона ( $H$ ) (рис. 7, а) [3; 17; 18; 20].

У моделі Максвелла елементи з'єднані послідовно, тому загальне навантаження передається повністю на елементи Гука ( $G$ ) і Ньютона ( $H$ ):

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_G = \sigma_H. \quad (5)$$



**Рис. 7.** Модель Максвелла (а) та залежність його деформації (б) і напруження (при  $\gamma = \text{const}$ ) (в) від часу  
**Fig. 7.** Maxwell's model (a) and the dependence of its deformation (b) and strain (at  $\gamma = \text{const}$ ) (c) on time

Загальна деформація складається з деформацій окремих елементів:

$$\gamma_{\Sigma} = \gamma_G + \gamma_H, \quad (6)$$

$$g_G = \frac{S}{E} - \text{деформація елемента Гука};$$

$$g_H = \frac{S}{h} \cdot t - \text{деформація елемента Ньютона.}$$

Загальна деформація:

$$g_{\Sigma} = \frac{S}{E} + \frac{S}{h} \cdot t. \quad (7)$$

Швидкість деформації буде рівна сумі швидкостей деформацій Гука і Ньютона:

$$\frac{dg_{\Sigma}}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{S}{h}. \quad (8)$$

Чим більший час дії навантаження, тим більша деформація. Модель Максвелла – це модель, яка утворює незворотні деформації (рис. 7, б).

Миттєва та фіксована деформації реалізуються за миттєвого розтягу моделі зі збереженням надалі постійної деформації. Під час утримання постійної деформації внутрішнє напруження, яке виникло, поступово зменшується (релаксує) внаслідок деформування в'язкого елемента (рис. 7, в).

**Релаксація** – це зменшення напруження з часом.

Нехай тіло піддається деформації і потім утримується в цьому стані. Деякі окремі випадки реологічної поведінки тіл розглядають при ізометричному (ступенева зміна довжини об'єкта і вимір в часі значення напруження) і фізіологічному режимах деформації (постійна сила, що розтягує, і вимір у часі довжини системи).

У такому разі  $g = \text{const}$ ,  $\dot{g} = 0$  і рівняння зводиться до такого:

$$\frac{\dot{g}}{E} + \frac{g}{h} = 0. \quad (9)$$

Розділимо змінні і проінтегруємо рівняння (9):

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{s} = -\frac{E}{h} \int_0^t dt \quad (10)$$

або

$$s = s_0 e^{-\frac{E}{h}t} \quad (11)$$

Таким чином, зменшення напружень у тілі з часом має експонентний характер і характеризується часом релаксації:

$$t_p = \frac{h}{E} \quad (12)$$

Час, протягом якого напруження зменшується в  $e$  разів (до  $\approx 0,37 \sigma_0$ ), називається часом релаксації (рис. 8). Якщо час дії на систему  $t$  набагато менший від часу релаксації  $t \ll t_p$ , то система проявляє тільки пружні властивості.

Зменшення напруження при постійному навантаженні називається релаксацією напруження. Початкове напруження  $\sigma = \sigma_0 = \sigma_{np} = \gamma E$ , зумовлене пружністю елемента  $E$ , поступово зникає через незворотну деформацію у в'язкому елементі  $\eta$ .

При фізіологічному накладенні напруження в певний момент пружний елемент починає миттєво розтягуватися на величину  $\sigma / E$ , а в'язкий елемент починає поступово переміщатися зі швидкістю  $\sigma / \eta$ . Коли в деякий інший момент напруження знімається, пружний елемент миттєво скорочується, але в'язкий елемент залишається в поточному положенні.

Числовий аналіз такої поведінки при  $\sigma = const$  дає рівняння:

$$\dot{g} = \frac{S}{h} \rightarrow g = \frac{S}{h}t \quad (13)$$

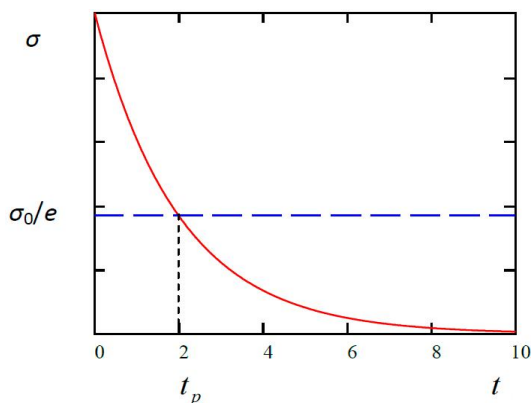


Рис. 8. Залежність напруження від часу і час релаксації в моделі Максвелла

Fig. 8. Dependence of strain on time and relaxation time in the Maxwell model

Рівняння (13) також характерне для моделі Ньютона.

Гладкі і скелетні м'язи поведуться в основному подібно тілу Максвелла. Це сприяє більшій розтяжності порожнистих органів, наприклад, кровоносних судин.

**Модель Кельвіна – Фойгта** – це модель в'язко-пружного тіла, яке здатне поновлювати свої властивості після зняття навантаження (еластичність) [13; 14]. Така модель утворюється внаслідок паралельного з'єднання тіла Гука і Ньютона (рис. 9).

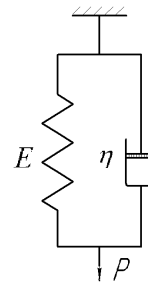


Рис. 9. Модель в'язко-пружного тіла Кельвіна – Фойгта

Fig. 9. Model of the visco-elastic body of Kelvin – Voigt

У цій моделі деформація є постійна, а напруження сумуються:

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_{\Gamma} + \sigma_{\eta}; \quad (14)$$

$$\gamma_{\Sigma} = \gamma_{\Gamma} = \gamma_{\eta}. \quad (15)$$

Поведінка тіла Кельвіна – Фойгта описується таким диференціальним рівнянням:

$$s_{\Sigma} = g \cdot E + h \cdot \frac{dg}{dt} \quad (16)$$

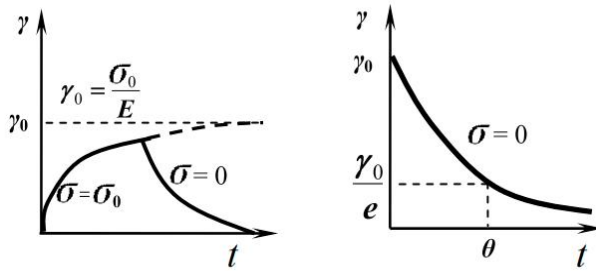
Тобто повне напруження розподіляється між пружним і пластичним елементами.

При ростягу в умовах постійно прикладеного навантаження  $\sigma = const$  розв'язок даного рівняння дає:

$$g = \frac{S}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (17)$$

де  $T = \frac{h}{E}$  – час запізнювання (повзучості, ретардації);  $g_{\infty} = \frac{S}{E}$  – максимальна відносна деформація.

Залежність відносної деформації від часу у моделі Кельвіна – Фойгта показана на рис. 10. Після зняття постійного навантаження зразок буде повільно повертатися до своєї первісної форми, також дотримуючись експоненційної кривої (експоненціальна повзучість).



**Рис. 10.** Залежність деформацій тіла Кельвіна – Фойгта від часу

**Fig. 10.** Dependence of the deformations of the Kelvin – Voigt body from time to time

Швидкість деформації:

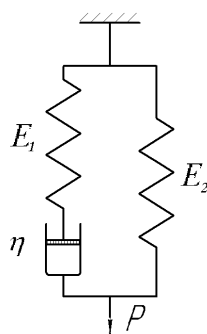
$$\frac{dg}{dt} = \frac{P}{h} - \frac{E}{h} \cdot g. \quad (18)$$

Модель Кельвіна – Фойгта (модель в'язко-пружного тіла) характеризується уповільненою оборотною деформацією та здатна відновлювати свої властивості після зняття навантаження.

**Модель Зінера** (модель стандартного лінійного тіла) – реологічна модель лінійного в'язко-пружного тіла, що складається з двох пружних елементів та в'язкого елемента. Така модель узагальнює характеристики моделей Кельвіна – Фойгта та Максвелла (рис. 11) [14; 18; 20].

Тож трьохелементна система моделі Зінера може бути описана таким рівнянням:

$$\frac{dg}{d(t)t} = \frac{E_2 \left( \frac{h}{E_2} \frac{dS(t)}{dt} + S(t) - E_1 g(t) \right)}{E_1 + E_2}. \quad (19)$$



**Рис. 11.** Модель лінійного в'язко-пружного тіла Зінера

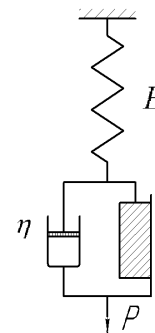
**Fig. 11.** The model of the linear viscous-elastic body of Ziner

**Модель Бінгама.** Тіло, яке виявляє в'язкі або пружні властивості залежно від напруження, – в'язко-пластична модель Бінгама – це комбінація всіх трьох ідеальних елементів: до з'єднаних пара-

лельно елементів Ньютона і Сен-Венана – Кулона послідовно приєднаний елемент Гука (рис. 12).

Так, наприклад, при електролітичному відновленні або газотермічному напиленні шар, який безпосередньо осідає на основний матеріал (адгезійний), повинен досить добре з'єднатися з основним матеріалом і володіти певним опором до сколювання та відшарування. Цей шар можна моделювати тілом Бінгама [2].

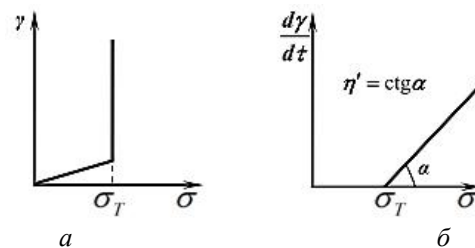
Наявність у цій моделі тіла Сен-Венана – Кулона дозволяє відобразити здатність опиратися сколюванню або міцність зчеплення (адгезію) з основним матеріалом деталі, для багатшарових матеріалів.



**Рис. 12.** Модель в'язко-пластичного тіла Бінгама

**Fig. 12.** Model of Bingham's visco-plastic body

За малих напружень ( $\sigma < \sigma_T$ ) розвиваються тільки пружні деформації (у тілі Гука). При досяганні напруження  $\sigma > \sigma_T$  має місце пластична деформація, яка зростає нескінченно (течія в'язко-пластичного тіла) (рис. 13).



**Рис. 13.** Залежність деформації тіла Бінгама від напруження (а) і швидкості деформації (б) цього тіла від напруження

**Fig. 13.** The dependence of the Bingham body deformation on the strain (а) and the deformation rate (б) of this body from strain

Математична модель в'язко-пластичного тіла – рівняння Шведова – Бінгама має вигляд:

$$s = s_T + h' \cdot \frac{dg}{dt}, \quad (20)$$

де  $\eta'$  – пластична або структурна в'язкість, Па·с;  $s_T$  – межа текучості, Па.

При навантаженнях, менших за межу текучості  $\sigma_T$ , швидкість деформації дорівнює нулю, а при більших – швидкість деформації зростає і описується прямою, що виходить з точки  $\sigma = \sigma_T$  (рис. 13, б).

Щоб проаналізувати взаємодію робочих органів ґрунтообробних сільськогосподарських машин з ґрунтовим середовищем, для опису ґрунтового середовища, розглянуто модель у роботі [5]. Особливістю цієї моделі (рис. 14) є послідовне з'єднання тіл Кельвіна – Фойгта та Бінгама, між якими встановлено додатковий елемент – стопор.

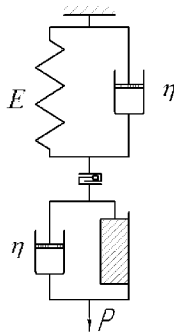


Рис. 14. Модель ґрунтового середовища  
Fig. 14. Model of soil environment

За цією моделлю спочатку деформується лише тіло Кельвіна – Фойгта, а в разі досягнення граничного напруження – деформується й тіло.

**Модель Прандтля** – модель твердого тіла з пружними властивостями до певної межі навантаження (межі текучості), перевищення якої призводить до необмеженої миттєвої деформації. Тіло Прандтля являє собою послідовно з'єднані тіла Сен-Венана – Кулона та Гука (рис. 15).

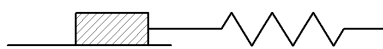


Рис. 15. Модель Прандтля  
Fig. 15. Prandtl Model

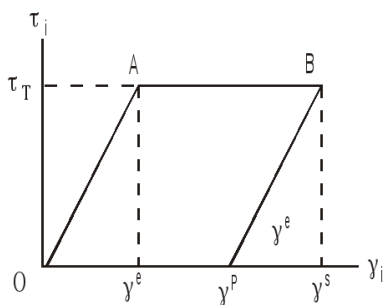


Рис. 16. Деформаційна крива тіла Прандтля  
Fig. 16. Prandtl's body deformation curve

У тіла Прандтля деформація при розвантаженні відновлюється лише частково. Загальна деформація зсуву складається з пружної і пластичної частин. Для підтримки розвитку пластичної деформації не потрібно підвищення напруження  $\tau$  до значень, що перевищують межу текучості  $\tau_T$ , досить підтримувати напруження, рівне межі текучості (рис. 16).

**Модель Бюргерса.** Згідно з [6; 11] реологічні властивості асфальтобетонів непогано описує так названа модель Бюргерса (рис. 17), що складена з двох послідовно з'єднаних ланок: моделі Максвелла і моделі Кельвіна – Фойгта [4].

Диференціальні рівняння, що пов'язують напруження і деформацію для моделі Бюргерса:

$$\frac{h_2}{E_1} \cdot s + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{h_2}{h_1}\right) s + \frac{E_2}{h_1} \int s dt = h_2 \frac{dg}{dt} + E_2 g, \quad (21)$$

або в інтегральному вигляді:

$$\frac{h_2}{E_1} \cdot s + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{h_2}{h_1}\right) \int s dt + \frac{E_2}{h_1} \int \left[ \int s dt \right] dt = h_2 g + E_2 \int g dt. \quad (22)$$

Основним недоліком моделі Бюргерса є те, що незворотні пластичні деформації  $\gamma_1$  починають накопичуватись відразу після того, як тільки буде виконана умова  $\sigma > 0$ .

У роботі [15] модель Бюргерса використано під час дослідження характеристики стабільності та коливання двомірного осевого рухомого полотна.

Рівняння повзучості моделі Бюргерса [10] має такий вигляд:

$$g = \frac{s}{E_1} + \frac{st}{h_1} + \left(\frac{s}{E_2}\right) \left[1 - e^{-\frac{E_2 t}{h_2}}\right]. \quad (23)$$

Прагнення дослідників точніше відобразити поведінку харчових матеріалів під навантаженням призвело до створення складних моделей, що значно ускладнило розрахунки. Є низка робіт, в яких зроблена спроба моделювати той чи інший технологічний процес. Наприклад, Н. К. Гупта і К. Д. Чойшнер запропонували описувати деформацію свіжого хліба при різанні реологічною моделлю **Шоффільда – Скотт-Блера** з елементом, що відображає втрату міцності хліба при зрізі (рис. 18). Під час різання хліба тиск через ніж передається хлібу, який спочатку відчуває миттєву еластичну ( $E_1$ ) і сповільнену в'язко-пружну ( $E_2, \mu_2$ ) деформації, потім при напруженні, що перевищує межу текучості ( $\tau_T$ ), матеріал пластично деформується ( $\tau_T, \mu_1$ ). При напруженні, що дорівнює межі міцності при зрізі ( $\tau_B$ ), відбувається поділ матеріалу (різання).

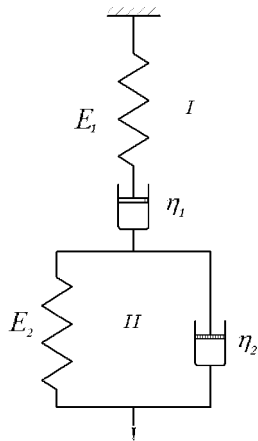


Рис. 17. Модель Бюргерса  
Fig. 17. Burgers model

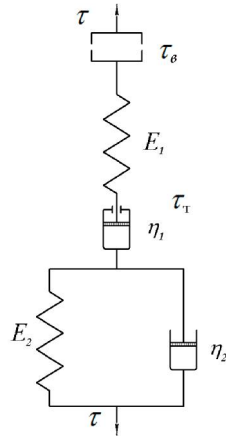


Рис. 18. Модель Шоффільда – Скотт-Блера  
Fig. 18. Model of Schoffield – Scott-Blair

Реологічне рівняння моделі Шоффільда – Скотт-Блера має такий вигляд:

$$g = \frac{\tau}{E_1} + \left( \frac{t}{h_2} \right) \cdot e^{-\frac{E_2 t}{h_2}} + \frac{(t - t_r)}{h_1}. \quad (24)$$

Різнання хліба починається при  $\tau > \tau_v$ . Для створення невеликої пластичної деформації хліба необхідно, щоб час прикладання навантаження (різання) був якомога меншим, тобто швидкість деформації повинна бути такою, щоб було швидко досягнуто максимальне напруження на зріз, а пластична деформація була б незначною.

Модель пшеничного тіста при розтягуванні має складніший вигляд (рис. 19) [8].

У роботі [9] проведено теоретичне дослідження реологічних характеристик зернової крохмалевмісної сировини спиртового виробництва, зокрема здійснена оцінка відносної деформації зерна кукурудзи при подрібненні залежно від нормальних напружень та відносної вологості матеріалу, на основі аналізу запропонованої механіко-реологічної моделі цієї сировини (рис. 20).

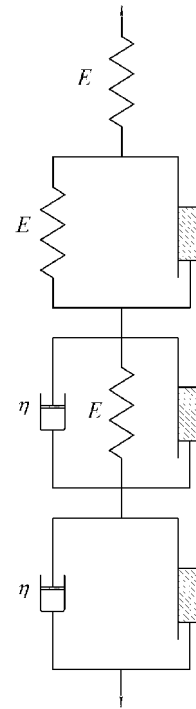
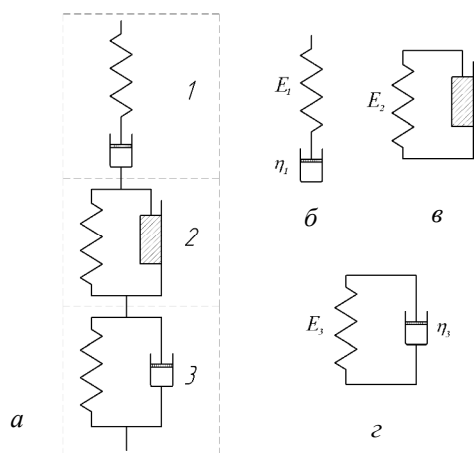


Рис. 19. Модель пшеничного тіста при розтягуванні  
Fig. 19. Model of wheat dough during stretching

Запропонована реологічна модель являє собою послідовне з'єднання ідеального тіла Максвелла (описує еластичну оболонку зерна, що містить зв'язану вологу), тіла, що являє собою паралельне з'єднання ідеально-пружного тіла Гука з ідеально пластичним тілом Сен-Венана (описує поведінку мучнистого ендосперму, що містить пружно-пластичний крохмальний наповнювач) і тіла Кельвіна (описує поведінку пружного зародка, що містить молекулярну вологу).

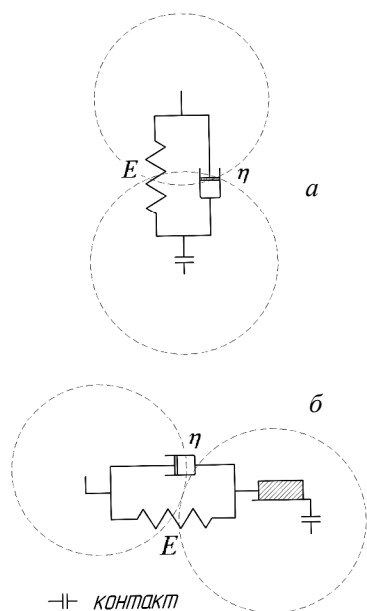
Аналіз результатів дозволяє зробити висновок, що збільшення прикладеного зусилля та, як наслідок, нормальних напружень у зерні призводить до нелінійного зростання його відносної деформації. На початковому етапі прикладання зусилля до зернини в матеріалі виникають переважно пружні деформації, а за подальшого зростання напруження форма деформаційної кривої набуває вигляду вітки параболи, що свідчить про переважні пластичні деформації, що відбуваються в зернині, аж до його руйнування при 1,65 МПа та деформації 0,28.

Дослідники J. Wicsek та M. Molenda [19] провели серію випробувань для вивчення впливу вологості ріпаку на фізичні властивості зернистого покриву. Вивчено навантажувальну характеристику збірки зерна, що вилита в кубічну випробувальну камеру та піддається одноосному обмеженому стискуванню.



**Рис. 20.** Реологічна модель: *a* – зернина кукурудзи; *б* – оболонка; *в* – ендосперм; *г* – зародок

**Fig. 20.** Rheological model:  
*a* – corn grain; *б* – shell; *в* – endosperms; *г* – germ



**Рис. 21.** Моделі механічного контакту:

*a* – в'язко-пружні в нормальному напрямі; *б* – в'язко-еласто-фрикційні в тангенціальному напрямі

**Fig. 21.** Contact mechanics models:

*a* – viscous-elastic in normal direction, *б* – viscous-elasto-frictional in tangential direction

Випробування проводили за вологості насіння ріпаку 7,5, 9 та 12 %. Встановлено, що розподіл навантаження значно змінювався з умістом води в насінні. Найменший ефективний модуль пружності був отриманий для зерна ріпаку з вологістю 12 %. Порівняння експериментальних даних та числового моделювання за методом дискретних елементів показало як кількісне, так і якісне узгодження.

У цьому дослідженні застосовано нелінійну контактну модель без ковзання [12] з використанням в'язко-пружної моделі в нормальному напрямі

(рис. 21, *a*) і моделі пружного, в'язкого та пластичного тіла в тангенціальному напрямі (рис. 21, *б*).

Ці моделі передбачають накопичення енергії у системі, у той час як моделі в'язкого і пластичного тіла передбачають розсіювання енергії.

**Висновки.** Для забезпечення максимально високого рівня якості готової продукції виробничі процеси збирання, зберігання, транспортування та, особливо, переробки повинні бути адаптовані до реологічних властивостей оброблюваних матеріалів.

Біологічні сільськогосподарські матеріали, зокрема насіння пшениці та інших культур, мають складну багатшарову реологічну структуру, що потребує ґрунтовного вивчення їх реологічної структури.

Для того щоб найбільш адекватно описувати реологічні властивості сільськогосподарських матеріалів, потрібно використовувати моделі, що складаються з трьох і більше елементів. Проте зі зростанням кількості елементів зростає не тільки точність опису конкретного біологічного матеріалу, а й значно ускладнюється їх математичний аналіз.

### Бібліографічний список

1. Арет В. А., Николаев Б. Л., Николаев Л. К. Физико-механические свойства сырья и готовой продукции. Санкт-Петербург: ГИОРД, 2009. 448 с.
2. Артемчук В. В. Реологічні властивості багатшарових матеріалів. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна*. 2011. Вип. 37. С. 20–25.
3. Багтєнев Г. М., Френкель С. Я. Физика полимеров / под ред. д-ра физ.-мат. наук А. М. Ельяшевича. Ленинград: Химия, 1990. 4323 с.
4. Богомолов В. О., Жданюк В. К., Ряпухін В. М., Богомолов С. В. Реологічна модель роботи асфальтобетону при стисканні. *Автошляховик України*. 2010. № 3. С. 34–37.
5. Ковбаса В. П. Механіко-технологічне обґрунтування оптимальної взаємодії робочих органів з ґрунтом: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Київ, 2006. 35 с.
6. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд / под ред. Н. Н. Иванова. Москва: Транспорт, 1973. 328 с.
7. Кострицький А. І., Калінков О. Ю., Тіщенко В. М., Берегова О. М. Фізична та колоїдна хімія: навч. посіб. Київ: Центр навч. літ., 2008. 496 с.
8. Кузнецов О. А., Волошин Е. В., Сагітов Р. Ф. Реология пищевых масс: учеб. пособие. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. 106 с.
9. Паламарчук І. П., Янович В. П., Купчук І. М. Дослідження реологічних характеристик зернової крохмалевмісної сировини спиртового виробництва. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2016. № 3 (95). С. 130–134.
10. Рейнер М. Реология. Москва: Наука, 1965. 223 с.
11. Шульман З. П., Ковалев Я. Н., Зальциндлер Э. А. Реофизика конгломератных материалов. Минск: Наука и техника, 1978. 240 с.



12. Ji S., Shen H. H. Contact Force Models for Granular Flows: Report No. 04-02. Potsdam; New York: Department of Civil and environmental engineering. Clarkson University, 2004. P. 3699–5710.
13. Lord Kelvin (Sir W. Thomson) «Elasticity» *Encyclopedia Britannica*. 9th ed. London, 1875.
14. Mainardi F., Gorenflo R. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2007. Vol. 10, No. 3. P. 269–308.
15. Marynowski K., Kapitaniak T. Kelvin-Voigt versus Bürgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002. 37. P. 1147–1161.
16. Moczo P., Kristek J., Franck P. Lecture Notes on Rheological Models. *DAPEM FMPI CU*. 2006. 40 p.
17. Renaud F., Dion J.-L., Chevallier G., Tawfiq I., Lemaire R. A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier*. 2011. 25. P. 991–1010.
18. Shahsavari R., Ulm F.-J. Indentation analysis of fractional viscoelastic solids. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2009. Vol. 4, No. 3. P. 523–550.
19. Wicek J., Molenda M. Moisture-dependent physical properties of rapeseed – experimental and DEM modeling. *International Agrophysics*. 2011. 25. P. 59–65.
20. Xiao R., Sun H., Chen W. An equivalence between generalized Maxwell model and fractional Zener model. *Mechanics of Materials*. 2016. 100. P. 148–153.

### Шеремета Р.

#### ОГЛЯД РЕОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Продукти харчування під час заготівлі, транспортування, зберігання, а особливо під час переробки, піддаються різним механічним впливам. При цьому виробничі процеси повинні бути організовані так, щоб забезпечити максимально високий рівень якості готових продуктів. Успішному розв'язанню цієї задачі сприяє знання реологічних властивостей та текстури харчових продуктів. Харчові продукти, включаючи сировину та напівфабрикати, залежно від складу, дисперсного складу та структури володіють різними реологічними властивостями й текстурними відмінними ознаками.

У статті проведено аналіз як елементарних реологічних моделей, таких як модель Гука (ідеально пружне тіло), Ньютона (ідеально в'язке тіло) і Сен-Венана – Кулона (ідеально пластичне тіло), так і інших складніших комбінацій цих елементарних реологічних моделей, таких як модель Максвелла, Кельвіна – Фойгта, Зінера, Прандтля, Бінгама та інших. Також наведено приклади їх використання.

Біологічні сільськогосподарські матеріали мають складну багатшарову реологічну структуру. Переважно кожен із цих шарів володіє власними, відмінними від інших властивостями. Тому для точнішого опису поведінки біологічних сільськогосподарських матеріалів під час транспортування та процесу переробки, а зокрема при взаємодії з робочими органами машин, потрібно детально вивчати реологічну структуру цих матеріалів.

Щоб найбільш адекватно описувати реологічні властивості сільськогосподарських матеріалів, потрібно використовувати моделі, що складаються з трьох та більше елементів. Проте зі зростанням кількості елементів зростає не тільки точність опису конкретного біологічного матеріалу, а й значно ускладнюється їх математичний аналіз.

**Ключові слова:** напруження, деформація, релаксація, реологія, реологічні моделі, тіло Гука, тіло Ньютона, тіло Сен-Венана – Кулона.

### Sheremeta R.

#### REVIEW OF REOLOGICAL MODELS

Foodstuffs during harvesting, transportation, storage, especially during processing are subject to various mechanical influences. In this case, the production processes should be organized in such a way as to ensure the highest possible level of quality of finished products. A successful solution to this problem is the knowledge of rheological properties and texture of food products. Food products, including raw materials and semi-finished products, vary by their composition, disperse composition and structure, with different rheological properties with texture distinctive features.

The article analyzes both elementary rheological models such as the model of Hooke (perfectly elastic body), Newton (perfectly viscous body) and Saint-Venant – Coulomb (ideally plastic body) as well as other more complex combinations of these elementary rheological models such as the model of Maxwell, Kelvin – Voigt, Ziner, Prandtl, Bingham and others. Examples of their use are also given.

Biological agricultural materials have a complex multilayered rheological structure. Preferably, each of these layers has its own, different from other properties. Therefore, for a more precise description of the behavior of biological agricultural materials during transportation, and the process of processing, and in particular in the interaction with the working bodies of cars, it is necessary to study in detail the rheological structure of these materials.

In order to adequately describe the rheological properties of agricultural materials, it is necessary to use models consisting of three or more elements. However, with increasing number of elements, not only the precision of the description of a particular biological material increases, but also their mathematical analysis becomes much more complicated.

**Key words:** strain, deformation, relaxation, rheology, rheological models, Hooke's body, Newton's body, Saint-Venant's – Coulomb body.

Стаття надійшла 14.10.2018