

УДК 514.18

ПРУЖНЕ ЗГИНАННЯ СМУГИ ПІД ДІЄЮ ПРИКЛАДЕНИХ СИЛ

Сергій Пилипака¹, д. т. н., Тетяна Воліна², к. т. н.,
Тетяна Кресан³, к. т. н., Ірина Захарова⁴, к. пед. н., Віктор Семерак⁵, к. т. н.

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, Україна,
e-mail: psf55@ukr.net

²Національний університет біоресурсів і природокористування України,
вул. Героїв Оборони, 15, м. Київ, Україна,
Сумський національний аграрний університет,
вул. Герасима Кондратьєва, 160, м. Суми, Україна,
e-mail: t.n.zaharova@ukr.net

³ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»,
вул. Шевченка, 10, м. Ніжин, Чернігівська обл., Україна,
e-mail: tanyakresan@i.ua

⁴Сумський державний педагогічний університет ім. А.С.Макаренка,
вул. Роменська, 87, м. Суми, Україна,
e-mail: zaharova_soippo@ukr.net

⁵Львівський національний університет природокористування
вул. Володимира Великого, 1, м. Дубляни, Львівський р-н,
Львівська обл., Україна,
e-mail: semerakvictor@gmail.com

<https://doi.org/10.31734/agroengineering2023.27.070>

Пилипака С., Воліна Т., Кресан Т., Захарова І., Семерак В. Пружне згинання смуги під дією прикладених сил

Пружне згинання стрижня передбачає відновлення його пружної осі до початкового стану після припинення дії деформуючих зусиль. Зазвичай пружну вісь у початковому положенні приймають прямолінійною. Це зумовлено широким застосуванням у будівельній галузі прямолінійних конструкцій, які виконують роль різного роду перемичок та перекриттів. Значний прогин таких конструкцій може призвести до їх руйнування, тому актуальною задачею є знаходження допустимих меж прогину зазначених будівельних елементів. Допустимий прогин таких прямолінійних елементів є надзвичайно малим, тобто несумірним із довжиною елемента, тому для обчислення його величини використовують спрощені теоретичні формули, які задовольняють практику. Спрощення зводиться до того, що диференціальні рівняння другого порядку пружної осі замінюють диференціальними рівняннями першого порядку, що дає достатньо прийнятні результати прогину прямолінійного елемента при незначних його деформаціях. В інженерній практиці мають місце прямолінійні стрижні, які зазнають значних деформацій. Для розрахунку їх прогинів не можна застосовувати спрощені формули. Крім того, значного поширення набули криволінійні пружні елементи, які уже мають початкову криволінійну форму пружної осі. Це стояки культиваторних лап, які згладжують пульсуючі динамічні навантаження, ресори, поршневі кільця тощо. Саме розрахунку форми пружної осі поршневого кільця в статті буде приділено найбільше уваги.

Знаходження форми пружної осі консольно защемленого стрижня ґрунтується на положенні теорії опору матеріалів, згідно з якою кривина пружної осі прямо пропорційна прикладеному моменту і обернено пропорційна його жорсткості. При цьому розглянуто два види навантаження: зосереджена сила на вільному кінці або рівномірно розподілена сила вздовж стрижня. Розглянуто дію цих сил як на прямолінійний стрижень, так і на стрижень із заданою сталою кривою, тобто на стрижень, окреслений по дузі кола. Для всіх випадків наведено приклади і побудовано їх пружні осі після деформації.

Ключові слова: пружна вісь, довжина дуги, розподілена сила, кривина, момент, диференціальні рівняння.

Pylypaka S., Volina T., Kresan T., Zakharova I., Semerak V. Elastic bending of a strip under the action of applied forces

Elastic bending of a rod involves restoring its elastic axis to its initial rectilinear state after the deformation forces have stopped. Rectilinear structures are widely used in construction for various types of bridges and overlaps. These structures must not deflect significantly, as it can lead to their destruction. Therefore, finding the permissible limits of deflection of these building elements is an urgent task. The permissible deflection of such rectilinear elements is extremely small, i.e. disproportionate to the length of the element, therefore simplified theoretical formulas, which satisfy the practice, are used to

calculate its value. The simplification means that the second-order differential equations of the elastic axis are replaced by the first-order differential equations, which gives sufficiently acceptable results of the deflection of the rectilinear element with minor deformations. In the engineering practice, there are rectilinear rods that undergo significant deformations. The simplified formulas cannot be used to calculate their deflections. In addition, curvilinear elastic elements, which already have the initial curvilinear shape of the elastic axis, have become widespread. These are risers of cultivator paws that smooth out pulsating dynamic loads, springs, piston rings, etc. It is the calculation of the shape of the elastic axis of the piston ring that is most considered in the article.

Finding the shape of the elastic axis of a cantilever clamped rod is based on the position of the theory of resistance of materials, according to which the curvature of the elastic axis is directly proportional to the applied moment and inversely proportional to its stiffness. At the same time, two types of load are considered, namely a concentrated force at the free end or a uniformly distributed force along the rod. The effect of these forces on both a rectilinear rod and a rod with a given constant curvature, that is, a rod outlined along the arc of a circle, is considered. Examples are given for all cases and their elastic axes after deformation.

Key words: elastic axis, arc length, distributed force, curvature, moment, differential equations.

Постановка проблеми. Незважаючи на уявну простоту, технологія виготовлення поршневого кільця є однією з найскладніших задач машинобудування. Кільце повинне бездоганно прилягати до стінки циліндра і тиснути на неї з однаковим зусиллям. Дослідження показали, що для збільшення терміну служби епюра тиску повинна бути не сталою, а мати грушоподібну форму з найбільшим тиском біля зазору кільця. Якщо таке кільце вийняти з циліндра, то у вільному стані його пружна вісь не буде колом, а матиме певну овальну форму. Таким чином, виникає задача знаходження пружної осі кільця у вільному стані. При виготовленні кільця застосовують різні технології. Одна з них – нарізання кільця із циліндричної заготовки, розрізання, розгинання з одіванням на спеціальну оправку, яка має форму кільця у вільному стані, і термофіксацією їх у печі при високій температурі. Термофіксація повинна зняти внутрішні напруження. Більш широко розповсюджений спосіб виготовлення кільця із заготовок некруглої форми на копіювальних верстатах. У цьому контексті теоретичне визначення форми пружної осі кільця за заданою епурою тиску в робочому стані має важливе значення, що зумовлює актуальність досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Модель пружного стрижня відіграє значну роль у математичному аналізі типових нестабільностей структур, що представляють собою довгі, тонкі та пружні елементи. Вони володіють деякими властивими для них принципами перетворення форми, що неявно втілені у їхній структурі. Так, типові процеси, що мають місце під час вигину стрижня при поздовжньому стисканні, викладено в [3]. У [10] розглядається горизонтальна криволінійна пружна стрічка, що змінює свою форму під дією зміни відстані між точками затискування та сили тяжіння. Авторами роботи [11] викладено аналітичну стратегію виявлення принципів конформації, властивих моделі пружного стрижня некруглого поперечного перерізу. Математичне формулювання та чисельна реалізація нової моделі для початково прямих

трансверсально ізотропних стрижнів наведені у [6]. Із праць останніх років, які найбільш близькі до змісту пропонованої статті, слід віднести [1; 8]. У праці [1] розглянуто згинання консольно закріпленої смуги під дією зо середженої сили, яка складає певний кут між вектором сили і дотичною до пружної осі смуги. У праці [8] розглянуто згинання консольно закріпленої смуги під дією зосередженої сили і прикладеного моменту, а також під дією зосередженої сили і розподіленої, якою є питома вага смуги.

Теоретичне дослідження зносу поршневих кілець у двотактних двигунах наведено у [9]. У [4] виявлено вплив геометрії профілю кілець на трибологічні характеристики двигунів. Вплив геометрії канавок поршневих кілець на їх деформацію та ефективність ущільнення досліджено у [2].

Отримані теоретичні результати можуть охопити досить широкий спектр сфер впровадження. Наприклад, у [5] результати дослідження деформації криволінійних стрижнів застосовано до прогнозування зміни кривини ребра людини під дією навантажень, а у [7] – до питань хірургії при фіксації поперекового відділу.

Постановка завдання. Наше завдання – розв'язати обернену задачу знаходження пружної осі криволінійної смуги у вільному стані, яка під дією розподіленої сили набирає заданої форми.

Виклад основного матеріалу. Вважатимемо, що смуга є абсолютно пружна, тобто вона повністю відновлює свою форму після припинення дії деформувального навантаження. Спочатку розглянемо простий приклад деформації консольно закріпленої прямолінійної смуги під дією зосередженої сили P , прикладеної в кінці смуги. У ролі смуги може виступати металева лінійка з прямокутним поперечним перерізом. Силою ваги смуги нехтуємо (вісь Oy спрямована вертикально вгору), оскільки вона набагато менша за силу P і її вплив на деформацію смуги буде незначний.

Згідно з теорією опору матеріалів кривина k осі смуги при її згинанні прямо пропорційна

прикладеному моменту M і обернено пропорційна жорсткості смуги EI . Жорсткість є добутком модуля Юнга E , що характеризує властивість матеріалу, на момент інерції I поперечного перерізу стрижня, який характеризує його здатність чинити опір згинанню. Ця залежність описується такою формулою:

$$k(s) = \frac{M(s)}{EI}, \quad (1)$$

де s є довжина пружної осі стрижня від його кінця до поточної точки.

З диференціальної геометрії відомо, що $k = \frac{d\alpha}{ds}$, де α – величина кута повороту дотичної до пружної осі при її переміщенні на відстань s . При смугі сталого перерізу її жорсткість теж є сталою. Виходячи з цього можна записати:

$$\alpha = \frac{1}{EI} \int M(s) ds. \quad (2)$$

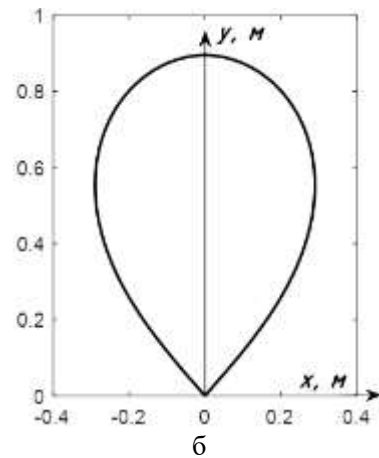
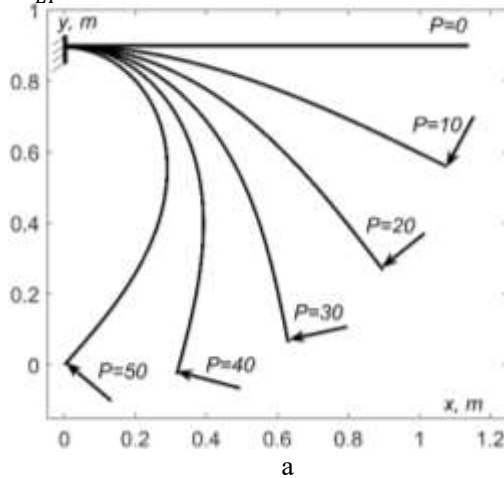


Рис. 1. Форма пружної осі металевої смуги, зігнутої внаслідок дії зосередженої сили P : а) послідовна зміна форми пружної смуги осі при збільшенні сили P ; б) форма пружної осі смуги, зігнутої під дією двох рівних сил до суміщення її кінців

Fig. 1. The shape of the elastic axis of a metal strip, bent due to the action of the concentrated force P : а) successive change in the shape of the elastic strip of the axis under the increase of the force P ; б) the shape of the elastic axis of the strip bent under the action of two equal forces until its ends are aligned

Подальше інтегрування виразів (3) після підстановки в них (4) потребує застосування числових методів. На рис. 1, а показано поступове згинання прямолінійної смуги довжиною $1,14$ м ($s=0\dots 1,14$). Момент інерції смуги прямокутного перерізу $a=0,3$ м, $b=0,03$ м знаходили за відомою формулою $I=ab^3/12$ м⁴, модуль Юнга брали в паскалях: $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Отримали жорсткість $EI=14,175$ Н·м². Силу P поступово збільшували від $P=0$ до $P=50$ Н. Точку защемлення смуги можна компенсувати її симетричним згинанням. У такому разі ми отримуємо пружну вісь, зображену на рис. 1, б. Довжина пружної осі $1,14$ м була спеціально підібрана так, щоб вона після симетричного відображення відносно осі ординат набула замкнутого вигляду (рис. 1, б). Таку криву можна отримати з допомогою металевої лінійки, зігнувши її так, щоб кінці збігалися. Слід зазначити, що числове значення жорсткості не впливає на форму пружної осі. Для лінійок з різною

Існує перехід від залежності $\alpha=\alpha(s)$ до параметричних рівнянь кривої, тобто до рівнянь пружної осі:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds. \quad (3)$$

На рис. 1, а показано послідовність згину прямолінійної смуги під дією прикладеної сили P . При $P=0$ пружна вісь смуги є прямолінійною. Прикладена сила P спричинює момент $M=Ps$, де поточне значення s довжини смуги відраховується від кінця смуги в напрямку її защемлення. У цьому разі вважаємо силу P слідкуючою, тобто такою, яка в процесі деформації смуги залишається перпендикулярною до її пружної осі. Згідно (2) знаходимо кут α :

$$\alpha = \frac{1}{EI} \int Ps ds = \frac{Ps^2}{2EI}. \quad (4)$$

жорсткістю потрібно прикласти різні зусилля для суміщення її кінців, але форма пружної осі буде однакою. У зв'язку з цим в подальшому ми прийемо жорсткість $EI=1$ для спрощення математичних виразів.

Розглянемо згинання смуги під дією розподіленої сили q (рис. 2, а). Будемо вважати, що ця сила слідкуюча, тобто при згинанні пружної осі вона весь час залишається перпендикулярною до неї. Така сила діє на поршневе кільце зі сторони стінки циліндра, якщо воно має відповідну форму, яку нам потрібно буде знайти. Поперечну силу Q знайдемо інтегруванням розподіленої сили вздовж осі смуги.

$$Q = \int q ds = qs. \quad (5)$$

Момент M знайдемо інтегруванням поперечної сили:

$$M = \int q s ds = \frac{q}{2} s^2. \quad (6)$$

Згідно з формулою (2) за умови, що $EI=1$, отримаємо:

$$\alpha = \int_0^s \frac{q}{2} s^2 ds = \frac{q}{6} s^3. \quad (7)$$

Підстановкою виразу (7) у рівняння (3) з наступним їх числовим інтегруванням отримуємо форму пружної осі, яка зображена на рис. 2, а. Довжина осі змінювалася в межах $s=0 \dots 0,157$ м що відповідає довжині півкола поршневого кільця радіуса пружної осі $r=0,05$ м ($k_0=20$) у робочому стані. Наступні розрахунки були спрямовані на згинання криволінійних смуг із заданою початковою кривиною. Ця задача стосується виготовлення поршневих кілець, у яких кривина k_0 у робочому стані відома. Вона дорівнює кривині кола, яке відповідає діаметру гільзи циліндра двигуна внутрішнього згоряння.

У вільному стані кривина пружної осі поршневого кільця буде меншою від k_0 . Вона збільшується від примусового згинання кільця при його попаданні у циліндр. Сила тиску стінки гільзи циліндра на кільце вздовж його осі має бути сталою, що відповідає розподіленому навантаженню q . Отже, кривина пружної осі кільця k_0 у робочому стані буде визначатися сумою кривини k у вільному стані і кривиною, отриманою від дії

розподіленої сили q . Оскільки кривина k прямо пропорційна прикладеному моменту M , то із врахуванням (6) при коефіцієнті пропорційності, рівному одиниці, можемо записати:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = k_0 - \frac{q}{2} s^2. \quad (8)$$

Із рівності (8) знаходимо вираз для кута α :

$$\alpha = \int \left(k_0 - \frac{q}{2} s^2 \right) ds = k_0 s - \frac{q}{6} s^3. \quad (9)$$

Підстановкою (9) у (3) і наступним числовим інтегруванням було отримано пружну вісь смуги під дією розподіленої сили q . На рис. 2, б показано кривину пружної осі k_0 після дії розподіленої сили і k_1, k_2 – у вільному стані. Кривини k_1 і k_2 відповідають зростанню розподіленої сили у два рази. Числові значення розподіленої сили q не наводимо, оскільки вона орієнтована на жорсткість смуги $EI=1$. Тут важливо отримати форму пружної осі, яка залежить від співвідношення жорсткості EI і розподіленої сили q . При $k_0=0$ (рис. 2, б) ми отримуємо криволінійну пружну вісь (k_1 і k_2), яка після дії розподіленої сили q набуває прямолінійної форми.

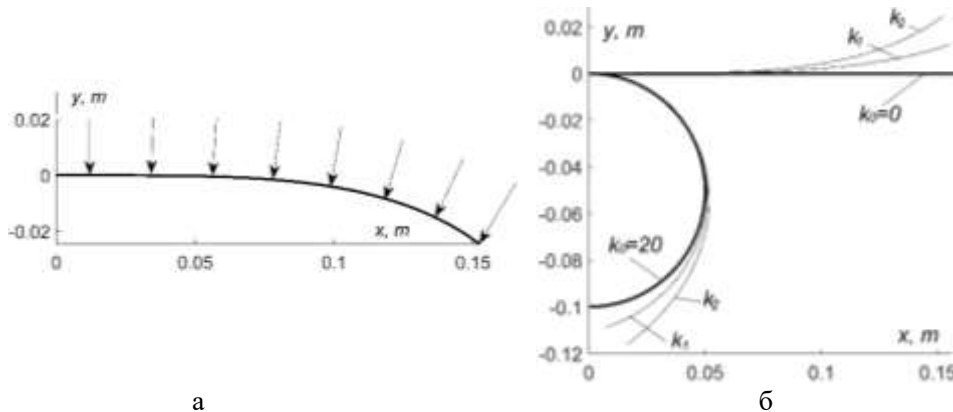


Рис. 2. До визначення пружної осі консольно закріпленої смуги під дією розподіленої слідкуючої сили: а) вихідна смуга у вільному стані прямолінійна; б) вихідна смуга у вільному стані має криволінійну форму
Fig. 2. The elastic axis of a cantilever-fixed strip under the action of a distributed tracking force: a) the original strip in a free state is rectilinear; b) the output strip in the free state has a curvilinear shape

Як уже зазначалося, рекомендується розподілену силу q для поршневого кільця робити не сталою, а змінною, причому вона повинна зростати в області зазору кільця. На більшій частині довжини пружної осі s кільця вона має бути сталою. Епюра розподіленої сили q має грушоподібну форму (рис. 3, а). Для її розподілу вздовж пружної осі кільця можна використати функцію на основі натурального логарифма $q=b \cdot \exp(-as^2)$. Для того щоб розподілена сила q після сталої величини зростала при наближенні до кінця півкола радіуса $r=1/k_0$, вказана функція буде мати такий вигляд:

$$q = b \exp[-a(\pi r - s)^2] + q_0, \quad (10)$$

де s – змінна величина – довжина пружної осі ($s=0 \dots \pi r$);

q_0 – сталі значення величини розподіленої сили;

a, b – коефіцієнти, що впливають на форму графіка.

На рис. 3, б за рівнянням (10) побудовано графік розподіленої сили, яка відповідає епюрі, зображеній на рис 3, а.

Підбором коефіцієнтів a і b в залежності (10) можна змінювати форму кривої (рис. 3, б). Зокрема, при $b=0$ розподілена сила буде сталою.

Збільшенням величини коефіцієнта b досягається зростання пікового значення розподіленої сили q , а коефіцієнтом a регулюється межа між сталою і змінною розподіленими силами q в межах пружної осі половини кільця.

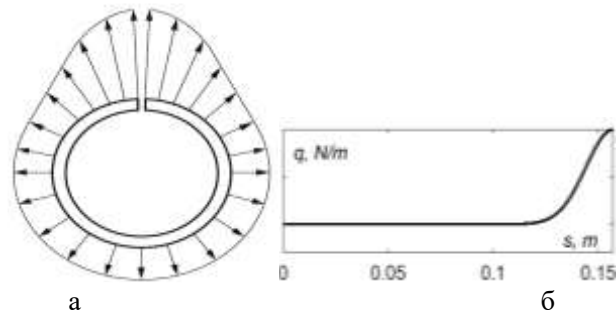


Рис. 3. Графічні ілюстрації до форми розподіленої сили q вздовж пружної осі поршневого кільця: а) еюра розподіленої сили q ; б) графік розподіленої сили q вздовж пружної осі половини кільця
Fig. 3. Graphic illustrations of the shape of the distributed force q along the elastic axis of a piston ring: a) plot of the distributed force q ; b) graph of the distributed force q along the elastic axis of a ring half

Числовим інтегруванням було побудовано пружну вісь поршневого кільця у вільному стані при сталій величині розподіленої сили q . Для цього інтегруванням виразу (10) згідно з (5) було зна-

йдено поперечну силу і наступним інтегруванням її виразу згідно з (6) – прикладений момент. За аналогією пружної лінійки було побудовано дві симетричні вітки (рис. 4).

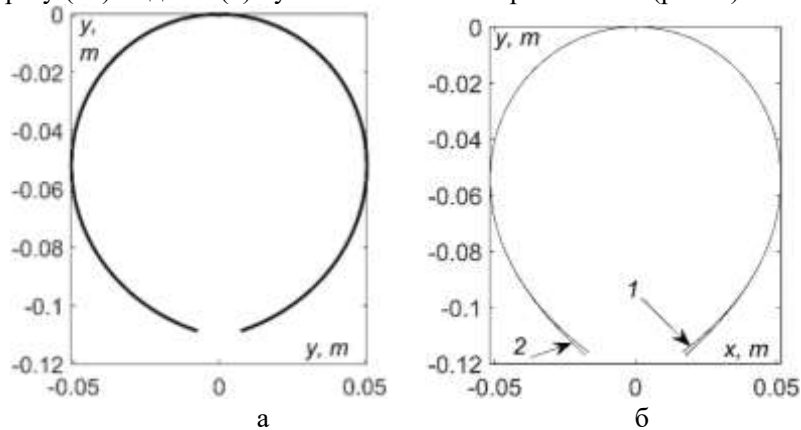


Рис. 4. Форма пружної осі поршневого кільця у вільному стані: а) при сталому значенні розподіленої сили q ; б) при сталому значенні розподіленої сили q , вдвічі більшої, ніж на рис. 4, а (позначено цифрою 1) і при зростанні розподіленої сили q біля зазору кільця (позначено цифрою 2)

Fig. 4. The shape of the elastic axis of a piston ring in the free state: a) at a constant value of the distributed force q ; b) at a constant value of the distributed force q , which is twice as large as in Figure 4, a (marked by the number 1) and with the increase of the distributed force q near the ring gap (marked by the number 2)

Радіус пружної осі кільця в робочому стані було прийнято $r=0,05$ м. Пружна вісь (рис. 4, а) відповідає кривій k_1 (рис. 2, б). На рис. 4, б побудовано дві пружні осі поршневого кільця: крива 1 відповідає кривій k_2 (див. рис. 2, б), а крива 2 – змінній розподіленій силі, графік якої зображено на рис. 3, б. При цьому складова цього графіка відповідала сталому значенню q розподіленої сили, яка діє по всій довжині осі кривої k_2 . У зв'язку з цим форма пружної осі кільця у вільному стані для обох випадків збігається, і тільки біля зазору існує незначне відхилення. Це відхилення можна побачити при співвідношенні сталого і пікового значень розподіленої сили, яке рівне двом і більше. При меншому співвідношенні криві практично збігаються.

Розроблений підхід дає можливість будувати форму пружної осі кільця і при інших

графіках дії розподіленої сили вздовж пружної осі.

Висновки. При прогинах балок, які застосовуються в будівельній справі, розрахунок форми їх пружної осі роблять за спрощеною лінійною теорією згину. Для практики це виправдано, оскільки прогин будівельних конструкцій порівняно з їх довжиною є незначним.

Однак існують елементи машин, у яких прогини значні. У статті отримано формули визначення форми пружної осі смуги при її значних прогинах із застосуванням нелінійної теорії згину. При цьому форма смуги у вільному стані приймається з початковою кривиною. Якщо кривина рівна нулю, то смуга прямолінійна, якщо вона має сталі значення, то пружна вісь смуги має форму дуги кола. Для першого випадку знайдені ана-

літичні залежності, за якими описується форма металевої лінійки при згинанні її моментом так, щоб її кінці збігалися. Для другого випадку розглянуто згинання смуги з криволінійною формою пружної осі на прикладі поршневого кільця. При цьому ставиться обернена задача: знайти криволінійну форму пружної осі кільця у вільному стані за умови, що після прикладення до нього розподіленої сили пружна вісь деформується у коло. Отримано аналітичні залежності, зроблено візуалізацію отриманих результатів.

Бібліографічний список

1. Харченко В. Є., Корсак В. І. Аналітичне розв'язання нелінійної задачі згину пружного стрижня. *Видавництво Львівської політехніки*. 2015. № 820. С. 105–115. URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/945aae25-c33f-43cf-9b89-14f025612278/content>.
2. Chen T., Wang L., Xu J., Gao T., Qin X., Yang X., Cong Q., Jin J., Liu C. Effect of groove texture on deformation and sealing performance of engine piston ring. *Machines*. 2022. 10(11). P. 1020. doi: 10.3390/machines10111020.
3. Ershov A. A., Suleimanov B. I. Some features of bending of a rod under a strong longitudinal compression. *Russ. J. Math. Phys.* 2017. Vol. 24. P. 216–233. doi: 10.1134/S1061920817020078.
4. Forero J. D., Ochoa G. V., Rojas J. P. Effect of the geometric profile of top ring on the tribological characteristics of a low-displacement diesel engine. *Lubricants*. 2020. 8(8). P. 83. doi: 10.3390/lubricants8080083.
5. García-Vilana S., Sánchez-Molina D., Llumà J. *et al.* A new technique for curved rod bending tests based on digital image correlation. *Exp Mech.* 2022. Vol. 62. P. 573–583. doi: 10.1007/s11340-021-00794-7.
6. Gebhardt C. G., Romero I. On a nonlinear rod exhibiting only axial and bending deformations: mathematical modeling and numerical implementation. *Acta Mech.* 2021. Vol. 232, P. 3825–3847. doi: 10.1007/s00707-021-03038-w.
7. Han X., Chen X., Li K. *et al.* Bending rod is unnecessary in single-level posterior internal fixation and fusion in treatment of lumbar degenerative diseases. *BMC Surg.* 2021. Vol. 21. P. 394. doi: 10.1186/s12893-021-01386-x.
8. Kresan T., Pylypaka S., Khropost V., Babka V. Elastic bending of a strip with a significant deflection under the action of applied forces and moment. *Applied Geometry and Engineering Graphics*. 2022. P. 137–147. doi: 10.32347/0131-579x.2021.101.137-147.
9. Rodriguez A. L., Vølund A., Klit P. Modeling of piston ring wear. *Proc IMechE Part J: Engineering Tribology*. 2021. Vol. 235(3). P. 629–638. doi: 10.1177/1350650120929860.
10. Vetyukov Y., Schmidrathner C. A rod model for large bending and torsion of an elastic strip with a geometrical imperfection. *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. P. 4061–4075. doi: 10.1007/s00707-019-02378-y.
11. Wang Z., Wang W., Zhang Q. New effective bending rigidity and structural instability analysis of noncircular cross-section elastic rod model. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2022. Vol. 231. P. 2325–2334. doi:10.1140/epjs/s11734-021-00370-z.

Стаття надійшла 10.05.2023